口袋题库考研数学“化繁为简”轻松学系列

线性代数习题精解巧析

邹　群　主　编

易福侠　孟旭东　丁兆明　副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是作者 20 年教学经验的结晶。作者在广泛收集、细致筛选习题素材的基础上，用 60 个知识点将线性代数课程“庖丁解牛”，并且设法将各个知识点根据知识体系及解题方法有机地联系起来，体现了作者独创的先以思想引出方法，再以方法指导解题的“化繁为简学习法”的总构思。

本书分为 6 篇，分别是行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型，每篇均由知识网络图、章节综述、若干知识点、综合测试题及详解组成。知识网络图可使读者形成知识框架，是学习本课程及解题的思维导图；章节综述言简意赅，系统解释知识网络图，是连接各章节及各个知识点的枢纽；题目按难度系数分为 5 类，循序渐进；题目的解析，从宏观思想方法到微观的解题技巧两方面深入解剖，其中穿插的 8 大“招数”是作者在海量题目中提炼出的解题技巧的精华。

本书每个章节及知识点中均穿插“书链”二维码，内含更多免费资源。本书适合考研复习和初学本课程的学生作为强化练习使用，也适合大学教师用于教学参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题精解巧析 / 邹群主编．—北京：电子工业出版社，2016.5
（口袋题库考研数学“化繁为简”轻松学系列）
ISBN 978-7-121-28741-1

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①邹…　Ⅲ．①线性代数—研究生—入学考试—题解　Ⅳ．①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 095245 号

策划编辑：齐　岳
责任编辑：徐　静　　特约编辑：刘　凡
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：20.75　字数：400 千字
版　　次：2016 年 5 月第 1 版
印　　次：2016 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254473、qiyue@phei.com.cn。

前　言

《高等数学习题精解巧析》、《线性代数习题精解巧析》及《概率论与数理统计习题精解巧析》是我们编写的系列习题书写任务。由于此类书多而繁杂，我们深感若不能写出特色，则很难被读者认可。因此我们殚精竭虑，力图将多年教学之精华全倾注于这套书中。

在写本套书之前，我们已经总结出了学习大学数学的“**化繁为简学习法**”。此方法立足于知识点的概括与联系，力图将千头万绪的知识点变得简单易懂。其特点是以“极限”等思想提炼方法，以方法指导繁杂的题型，以专题带动知识点。若运用此方法，将彻底打破数学学习枯燥刻板的印象，给学习者一种全新的体验。我们将“**化繁为简学习法**”贯彻到本习题书系列中，但是由于本习题书系列是按照知识点切分的，即需要和知识点串讲相结合，因此出现一个矛盾：若过分注重知识点的细分，则难免冲淡“**化繁为简学习法**”的思想；若要考虑知识点的联系，如何组织内容又是一个难题。若不解决这个矛盾，则难以将本习题书系列写出特色。

就线性代数课程而言，其内容相对高等数学课程而言少很多，题型的变化也不如后者。但是本课程的特点在于其学习方法与高等数学相比有较大差异。高等数学再难学，它毕竟是中学数学的延续，其内容不过是在中学数学的内容加上“极限”的思想而已，学生们接受起来相对容易。线性代数则不同，它在中学基本上没有“根”，其思维方式与中学的数学也迥然不同：概念更加抽象，更偏重概念的联系及证明。因此，能否在较短的时间内掌握本课程的中心思想与主要解题方法，就成为摆在学生面前的一个重大问题。

我们在多年教学实践的基础上，将“**化繁为简学习法**”的精髓加入书中，将线性代数的核心：“一个问题、两个工具”紧密地联系起来，让所有习题真正生动起来，我们不做习题的“搬运工”，不在题海中迷失，我们要引导学生在题海中畅游无阻。

针对上面两个问题，本书的解决方案是在结构上以细分知识点为主，运用“化繁为简”的思想，在本书前面将所有知识点联系起来引出整本书的“思维导图”，同时在每章前面也各有一个框图。这些图可反映出三个方面的内容：第一，反映知识点之间的联系，不让每个知识点成为“孤岛”，让学生在各个知识点之间能够通行无阻；第二，引导学生有目的地选择题目来练习，也就是说，不一定要按部就班地沿着知识点的顺序机械地去做题，而是通过这些图可以引导学生有选择性、有重点地做题，大大提高学习的效率；第三，通过这些图让大家明白综合题的出题思路，从而顺利拆解综合题。

本书的结构是将线性代数课程精确地分为 60 个知识点，每个知识点均为一个最小的功能模块：知识点内容包含其涉及的定理、概念、结论与解题方法综述等，相关的习题按照 5 个等级的难点尽可能铺开，习题皆精心选择且比较全面，配有精细的解析，部分

习题后面还附有精彩的点评，中间插上一些“小而精”的总结。总结中有不少原创的或归纳的“独门绝技”，我们将这些独门绝技总结成 8 大招数：**妙招、怪招、险招、绝招、奇招、趣招、无招胜有招、比招**，合起来就是“**妙怪险绝，奇趣无比**”。

最具吸引力的是，书中每章及每个知识点均植入“口袋题库考研”开发的“书链”APP 学习平台的二维码，学习者可在手机上下载“书链”APP 应用，安装后扫二维码即可进入本书的资源库，资源库中将持续上传本书丰富的资源，如更多的对应知识点的习题、视频，以及化繁为简学习法思维导图、解题招数详解、精品教案等，作为本书的延伸服务。读者也可以下载“口袋题库考研”APP 应用进入“邹群考研数学课堂”，体验全新的学习模式：共享海量学习资源，吸取前人的学习经验，与学长、专家零距离互动等，最大限度地提高学习数学的效率。“口袋题库考研”APP 学习平台与本书联合，学习者与作者零距离互动，书中的不足将在第一时间内反馈到作者的面前，使得习题书的更新速度加快，习题书于是有了自我修复、自身造血的强大功能。最可喜的是，“口袋题库考研”作为线上平台可与书籍系列形成线上与线下互相补充、相得益彰的局面，这是其他同类书籍所不具备的优势。

总之，本习题书系列与其他同类习题书不同的特色是：解决了习题书总结大同小异、大而散和中心不突出的问题，力求做到形散而神不散、简约而不简单，既有引导又有独特的解题招数。更重要的是在形式、结构与内容上均有所突破，令人耳目一新、一目了然。

本书同时也适合初学的学生，不过初学者会感到题型略微偏难一些，它最适合中等以上基础的学生。当然对教师而言，它也是一个好的题库，因为题型十分丰富，可供教师教学研究和出卷参考使用。

本书的关联平台除“口袋题库考研”外，主编邹群老师的个人网站——瀚海网（http://hanhai.org）中也将有与书对应的题库内容供大家试读，题库中的题量比书籍大一倍，可供学生补充使用。其他任何个人和机构未经同意不可发布本系列书籍与题库中的内容，若需合作，必须与“口袋题库考研”及瀚海网联系。

最后，向为本书提供资料、提供建议及参与本书编辑修改工作的所有老师们致以深深的敬意和诚挚的谢意！由于水平及编写时间有限，书中错漏难免，欢迎读者批评指正！所有参与本书编写的师生列举如下。

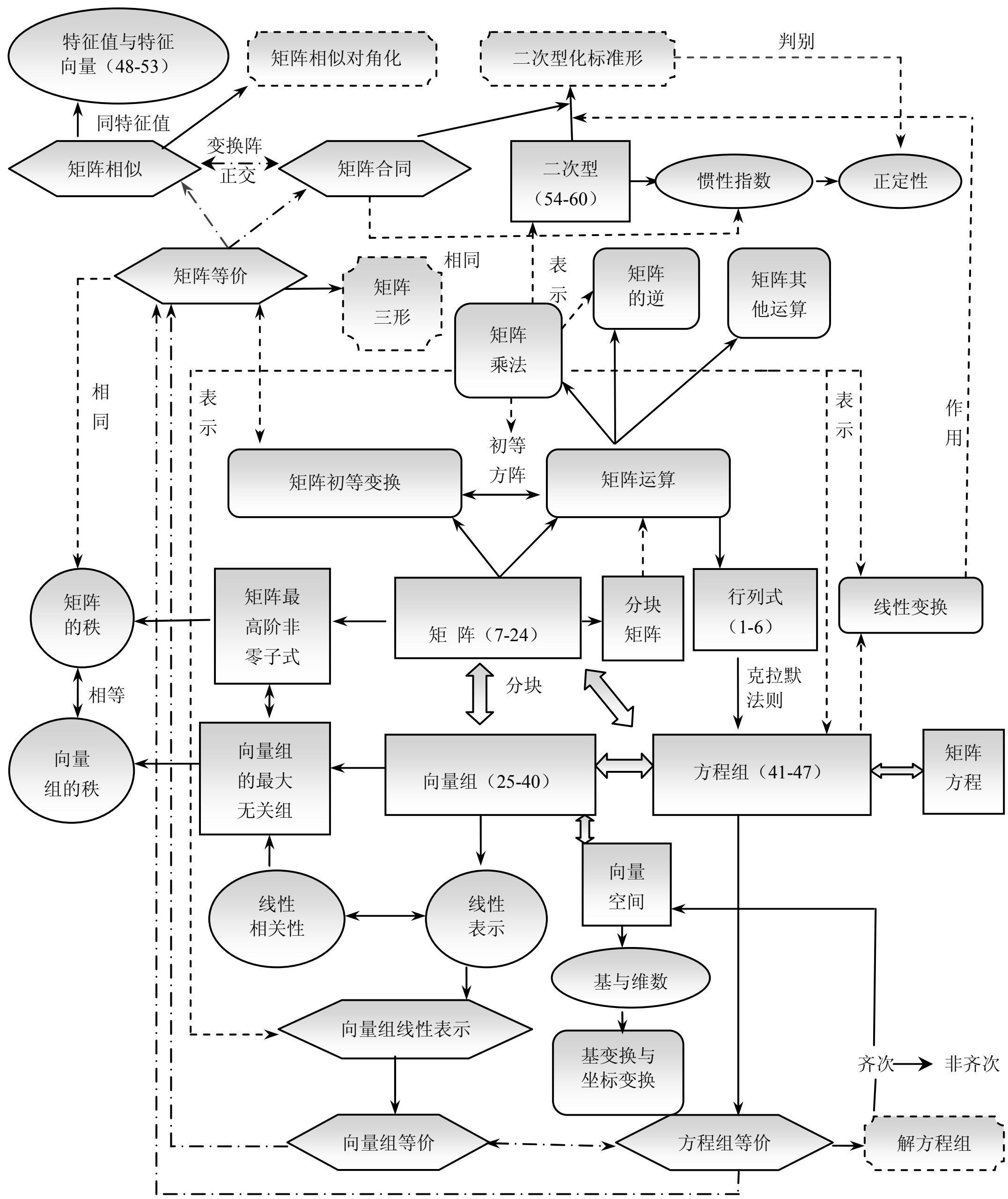
主　编：邹　群　南昌航空大学
副主编：易福侠　江西交通职业技术学院
孟旭东　南昌航空大学科技学院
丁兆明　江西理工大学（南昌校区）
参编（排名不分先后）：
陈艳君　南昌大学科学技术学院
李　曦　南昌航空大学
喻　璟　江西交通职业技术学院
刘　勇　南昌航空大学
陈　洁（研究生）南昌航空大学

主编　邹群
2016 年 3 月于南昌航空大学

目　录

0 总框图及全课程综述

0.1　线性代数知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

0.2 全课程综述

线性代数课程学时不多，其特点是内容紧凑、结构性强、内容之间的逻辑关系紧密，这与高等数学课程迥异，初学者适应它需要一个过程，对于考研学生来说，尤为重要的是如何提高学习效率。

本课程的内容用一句话概括，即“一个问题，两个工具，一个应用”，简称“一二一”。“一个问题”指的是“如何解线性方程组”的问题，“两个工具”指的是“矩阵”与“向量组”，“一个应用”指的是它们在二次型上的应用。矩阵、向量组与线性方程组三者之间的联系非常紧密，许多定理和结论之间都是可以互相关联的，它们像渔网一样，无论站在哪一个基点上，都可以俯瞰整个课程的全貌。

矩阵、向量组与线性方程组各有其功用。首先，线性方程组可以作为本课程的基点[(41)–(47)]，解线性方程组的问题可以分为三个小问题（参见第 4 篇综述），通过对应的矩阵或向量组，可得出相应的结论，并且明确解的结构，最终使问题得到解决。关于三个小问题的结论是“纲领性的”，即由它们可以推导出课程的大部分的定理！

其次，矩阵可以统领全课程[(7)–(24)]，绝大多数问题都可以归于矩阵来解决。矩阵分为矩阵的运算与初等变换两大部分。矩阵的运算分一元和二元运算两大类，其中行列式[(1)–(6)]、矩阵的逆、矩阵的转置和共轭矩阵为一元运算，矩阵的加法、数乘和乘法为二元运算。矩阵的初等变换是解决许多问题的利器，尤其是“矩阵三形”，各自能对应解决一大类问题。矩阵的初等变换和矩阵的乘法运算有着密切的联系，初等矩阵是联系它们的枢纽，因此矩阵的各类运算中，以矩阵乘法最为重要，用它可以描述许多其他概念。

最后，向量组是三者中最“苗条”的，也最具灵活性，因此所有定理中，关于向量组的定理和结论最多，关于向量组的证明题的比例与难度也最大。向量组的线性相关性是本课程中最难理解的概念，也是向量组的核心概念[(25)–(40)]，随之可引出向量组的最大无关组及向量组的秩的概念。向量空间则是一种关于矩阵线性运算封闭的代数结构。

本课程的主导思想是“等价”。无论矩阵、向量组或线性方程组，都是在“等价”的前提下进行化简，最终解决问题的。要特别注意矩阵等价、向量组等价与方程组等价这“三大等价”之间的联系。在矩阵等价之下，又有矩阵相似与矩阵合同，它们的背景各异，也各有变换下的不变量：矩阵等价的不变量是矩阵的秩，矩阵相似的不变量是矩阵的特征值，矩阵合同的不变量是矩阵的惯性指数。若熟练掌握了这三个不变量，就能在各类变换中找到其中“不变”的性质，从而为解决问题带来思路。

对应矩阵的三大关系，矩阵有三类标准形，其中矩阵初等变换与合同变换化标准形是无需条件的，仅相似变换化标准形需要条件。正因为如此，大家可以将矩阵相似变换化标准形的问题分为三个小问题（参见第 5 篇综述），随之引出特征值与特征向量的概念[(48)–(53)]，特征值与特征向量是成对的，矩阵相似对角形对角线上的元素即为矩阵的特征值，相似变换矩阵的列向量即为特征向量。

对于二次型[(54)–(60)]，将之化标准形是一类重要的题型，这里对应矩阵的合同变换，它与相似变换是完全不同的两种变换，但在正交变换下两者是一致的。

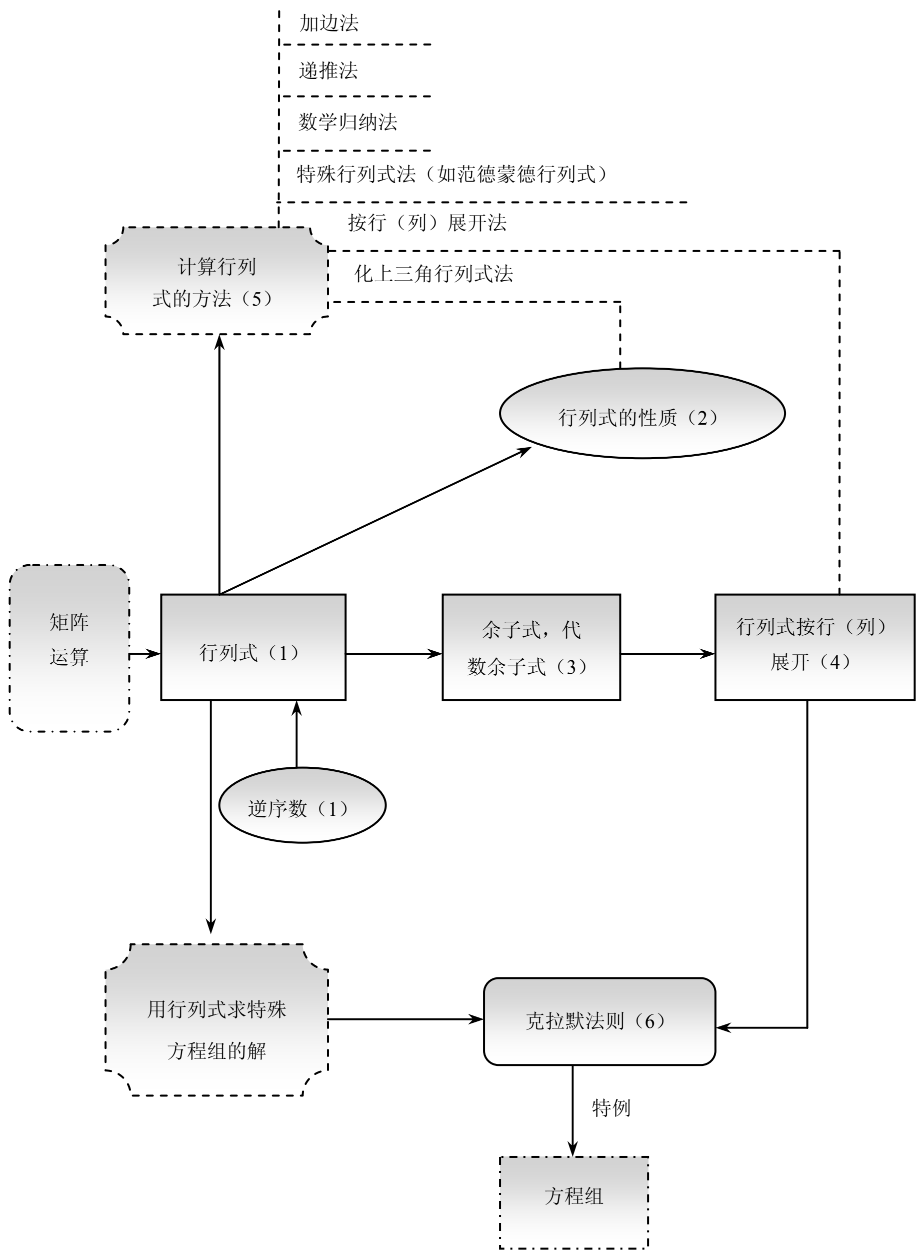
下面简述如何求解综合题。综合题涉及的都是抽象的矩阵、向量组和方程组，其中

涉及的概念很多，考研题中很常见，因此大家会感到困难，面对题目无从下手。本课程解综合题的“密钥”是通过矩阵分块，将向量组、矩阵与方程组联系起来，它们互为工具来解题。大家很容易忽视矩阵分块，实际上它是连接矩阵、向量和线性方程组的“中心枢纽”。对初学者而言，不需要太重视它，但是作为考研的学生，若不重视它则难以解好综合题。因此大家必须重视矩阵的分块，若没有矩阵分块，本课程不但松散，而且缺乏灵活性。

注：文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号。

第1篇　行列式

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

第 1 篇

综　述

行列式[1]是线性代数课程的开端，它和其他章节的联系不那么紧密，比较“特立独行”。实际上，它可归类于对特殊矩阵的一种特殊的运算，即方阵的行列式运算，运算的结果是一个数。在行列式中首次涉及“序”的思想，而此思想将贯穿于线性代数课程的始终。

本篇分为两部分，第一部分为行列式的概念及计算，其主要计算方法有两种，即通过行列式的性质[2]而得的化上三角行列式法，以及通过代数余子式而得的[3]行列式按行或列展开法[4]，而数学归纳法、递推法、特殊行列式法、加边法等在考研题中较少见[5]；第二部分为克拉默法则[6]，它解决了 n 元 n 个线性方程组成的线性方程组何时有唯一解的问题。实际上，在第 4 篇有更简便且适合所有方程组的解法，克拉默法则的主要意义在理论方面，在一些抽象的矩阵或行列式的证明题中偶尔会用到它。

大家在复习本篇时请注意它和后面内容的联系。联系之一是在线性方程组解的结构中，克拉默法则默默扮演了一个“隐藏”的角色：对于一般的方程组，除去“多余”的方程及自由未知量之后，剩下的变量数目与方程的数目是相同的，这才符合克拉默法则的条件！因此克拉默法则是解线性方程组的基础。它给出了一个解方程组的原则：一个独立方程解一个未知量（这里所谓“解一个未知量”，指的是未知量有唯一解）。联系之二是行列式的值非零当且仅当它对应的矩阵可逆，它是判断矩阵可逆的一种常用的方法。联系之三是行列式的性质中有几个性质与矩阵的初等变换很相似，大家需要特别注意，虽然它们之间有联系，但是属于完全不同的运算。

行列式与矩阵的其他运算结合起来会出现很多巧妙的题型，比较精彩的是利用矩阵乘法的行列式的性质：$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 来解题，它在许多技巧性强的题目中扮演了“魔术师”的角色，用了它之后常常会有许多令人惊喜的结论出现，关于这一点将在第 2 篇中举出具体实例。

注：文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握，并根据自己的实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

更多资源请扫二维码：

知识点1　行列式、逆序数

更多资源请扫二维码:

1.1　概念、定理

1．概念

定义 1.1.1　二阶行列式　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$。

定义 1.1.2　三阶行列式　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$。

定义 1.1.3　主对角线　从左上角元素到右下角元素的连线称为主对角线。

定义 1.1.4　副对角线　从右上角元素到左下角元素的连线称为副对角线。

定义 1.1.5　全排列　n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）。n 个不同元素的所有排列的种数通常用 P_n 表示。

定义 1.1.6　标准排列　在 n 个自然数的全排列中，排列 $123\cdots n$ 称为标准排列或自然排列。

定义 1.1.7　逆序数　在一个排列中，当某两个元素的先后次序与标准排列的次序不同时，就称为有一个逆序。一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

定义 1.1.8　奇排列　逆序数为奇数的排列叫做奇排列。

定义 1.1.9　偶排列　逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

定义 1.1.10　$\boldsymbol{n}$ 阶行列式　设有 n^2 个数构成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix} \tag{1.1}$$

其代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

（其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；t 为这个排列的逆序数；Σ 表示对所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和）称为 n 阶行列式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 称为行列式的元素，下标 i 与 j 分别称为行标与列标。另有一种记法是 $|\boldsymbol{A}|$，其中的 $\boldsymbol{A}$ 即为数表（1.1），即方阵。

定义 1.1.11　上（下）三角行列式　主对角线（不包括主对角线）以下（上）的元素都为 0 的行列式叫做上（下）三角行列式。

定义 1.1.12　对换　在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的变换叫做对换。将相邻两个元素对换，叫做相邻对换。

2．定理

定理 1.1.1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数。

定理 1.1.2　*n* 阶行列式的等价定义　数表同式（1.1），n 阶行列式也可定义为

$$\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中，t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

1.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 3，知识点 4
- **综述**：本知识点从二、三阶行列式的概念引出 n 阶行列式的定义，行列式是方阵的运算，其值是一个数。引出行列式之前须提出排列的逆序数的概念。本知识点的题型分为两类，一类是求逆序数；另一类是低阶行列式的求解及根据定义计算行列式的方法，根据定义一般只能求一些特殊行列式的值，如含元素“0”较多的行列式。

1.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 2.3.2

例 1.3.1（难度系数 0.2）　排列 356124 的逆序数为__________；n 个元素组成的排列 $23\cdots n1$ 的逆序数为__________；$2n$ 个元素组成的排列 $24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$ 的逆序数为_________。

解析：此题考查逆序数的概念。在计算逆序数时，可以打个比方：将每个数看成一个人，可以让大家从左往右看齐，每个人数出右边比自己矮（即比自己数字小）的人的个数，最后将所有数出的数加起来即为此排列的逆序数。同理，也可以从右往左看齐。

解：8；$n-1$；$\dfrac{n(n+1)}{2}$。

例 1.3.2（难度系数 0.6） 如果 n 个元素组成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数是 k，则排列 $j_n\cdots j_2j_1$ 的逆序数是（ ）。

（A）k （B）$n-k$ （C）$\dfrac{n!}{2}-k$ （D）$\dfrac{n(n-1)}{2}-k$

解析：此题比较抽象。仔细观察排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 和 $j_n\cdots j_2j_1$ 的位置关系，发现它们的元素顺序正好完全颠倒，即原来为逆序的成了顺序，原来为顺序的成了逆序。又因为所有排列中可能的最大逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$，而排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 k，所以 $j_n\cdots j_2j_1$ 的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$。

解：（D）。

例 1.3.3（难度系数 0.4） 证明：如果一个 3 阶行列式 D 的所有元素均等于 ±1，则该行列式的值是偶数。

解析：本题考查行列式的概念，可将行列式的定义式列出来进行分析。注意正项与负项的一一对应。

证明：因为 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，注意到 3 阶行列式的展开式有 6 项，可将行列式自带符号 $(-1)^t$ 相异的两项作一一对应，成为 3 对数，而等式中每一项的值只能为 1 或 -1，所以每一对数之和只可能是 2、0、-2，它们均为偶数，且偶数的和为偶数，所以原行列式的值也必为偶数。

例 1.3.4（难度系数 0.4） 行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=$__________。

解析：利用行列式的概念来计算行列式。n 阶行列式的概念式为

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

由于此行列式中有许多的“0”，且展开式某项中只要含有“0”元素，此项的值即为 0，因此展开项中可能非 0 的只有 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{(n-1)n}a_{n1}$ 一项，且此项中列标排列的逆序数为 $n-1$，故原行列式的值为 $(-1)^{n-1}n!$。

解：$(-1)^{n-1}n!$。

例 1.3.5　（难度系数 0.6）　$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为________。

解析：此题直接计算行列式太复杂。根据行列式的定义，行列式每一项中的元素必须来自不同的行与列。现在从第一列开始选元素：若第一列选 $a_{11}=5x$，那么此项不能再选第一行的元素，又因为此项后面 3 个因子不可能仅选到 $a_{22}=x$，$a_{33}=x$，$a_{44}=2x$ 中的两个（若选到两个，则必选到第 3 个），所以此种选法得不到含 x^3 的项；若第一列选 $a_{31}=1$，那么此项第三行不能再选，显然，此选法得不到含 x^3 的项；若第一列选 $a_{21}=x$，那么此项不能再选第二行的元素，剩下的为了得到含 x^3 的项，对应第三、四列只能选 $a_{33}=x$，$a_{44}=2x$，于是此项对应第二列只能选 $a_{12}=1$，故得到一个含 x^3 的项：$-a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}=-2x^3$；同理，第一列选 $a_{41}=x$ 时，得到另一个含 x^3 的项：$-a_{41}a_{22}a_{33}a_{14}=-3x^3$。加起来可得 x^3 的系数为 -5。

解：-5。

知识点 2　行列式的性质

更多资源请扫二维码：

2.1　概念、性质与规定

1．概念

定义 2.1.1　转置行列式　记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式。

2．性质

性质 2.1.1　行列式的性质

（1）行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等。

（2）互换行列式的两行（列），行列式变号。

（3）行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面。

（4）行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零。

（5）若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，如第 i 行的元素都是两数之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（6）将行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3．规定

规定 2.1.1　行列式行（列）变换的记法

（1）互换第 i 行（列）与第 j 行（列），记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$；

（2）第 i 行（列）乘以数 k，记为 $r_i \times k$（$c_i \times k$）；

（3）以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$。

2.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 1，知识点 4
- **综述**：本知识点讲解了由行列式的定义引出的行列式的 6 个性质，它们可用来求行列式的值或做证明题，其中用得最多的是性质 2.1.1（6）。计算行列式的方法很多，利用行列式的性质是最基本的方法，本知识点尽量选择单纯用此种方法计算行列式的题目，以便让大家熟悉行列式的各种性质。注意行列式的性质 2.1.1（3）与性质 2.1.1（5）容易与矩阵的数乘与加法相混淆，大家可以在做题中体会它们的不同之处。

2.3　经典例题精解巧析

例 2.3.1（难度系数 0.4）　求行列式$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$的值。

解析：此题直接计算太困难，利用行列式的拆分性质（即性质 2.1.1（5））可简化运算。

解：
$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 100 & 204 \\ 200 & 200 & 395 \\ 300 & 300 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 100 & 204 \\ -1 & 200 & 395 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 204 \\ -1 & 200 & 395 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 3 & 100 & 200 \\ -1 & 200 & 400 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2000$$

例 2.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 1）　计算 n 阶行列式
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1+a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

解析：此行列式的特点是，所有的行（列）的和为同一个常数。具有这样特点的行列式很多，一般的处理方法是利用性质 2.1.1（6），先将各列（行）中所有元素全加到第一列（行）再考虑下一步，最终可用行列式的概念计算。

解：将 D 的各列全部加到第一列，再将第一列的公因子提出，可得

$$D=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1+a_n\\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\end{vmatrix}=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\text{。}$$

招数 2.3.1　妙招：计算行列式的原则——“头轻脚重”

在行列式的计算中，最怕“头重脚轻”，最喜欢“头轻脚重”，意思是上面的元素尽量是小整数，最好是“1”，这样作变换时不易出现分式运算，而常常是整式的运算，整式的运算当然比分式的运算简便。有一类行列式，每一行（列）加起来的值都相等，这样将各行（列）加到第一行（列），再“提出公因子”，可将行列式中第一行（列）全变成 1，以便于以后计算。这是常用的技巧。

例 2.3.3（难度系数 0.6）　方程 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}=0$ 的根的个数为__________。

解析：直接计算太麻烦。观察各列的特点，可先利用列变换，将行列式化成 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为方阵）形式，它的值为 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。

$$f(x)\xlongequal[\substack{c_3-c_1\\ c_4-c_1}]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\ 2x-2 & 1 & 0 & -1\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2\\ 4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\ 2x-2 & 1 & 0 & 0\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1\\ 4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2 & 1\\ 2x-2 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2 & -1\\ x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$=(-x)\cdot(-5x+5)$$

$$=5x(x-1)$$

解：2 个。

例 2.3.4（难度系数 0.8，跨高等数学学科综合题）　已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x & 1 & 2 & 4\\ 1 & 2-x & 2 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 2-x\\ 1 & x & x+3 & x+6\end{vmatrix}$，

证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根。

解析：此题属于跨高等数学学科综合题。证明方程根的存在性主要考虑零点定理和罗尔定理。此题中出现了导数，故考虑用罗尔定理。函数已给出，区间为[0,1]，下面只需验证罗尔定理的条件即可。注意：无需通过求行列式而求出函数的表达式，只需求出端点值。

证明：因为

$$f(0)=\begin{vmatrix}0&1&2&4\\1&2&2&4\\2&0&1&2\\1&0&3&6\end{vmatrix}\overset{\substack{r_4-r_1\\r_2-r_1}}{=}\begin{vmatrix}0&1&2&4\\1&1&0&0\\2&0&1&2\\1&-1&1&2\end{vmatrix}\overset{r_4-r_3}{=}\begin{vmatrix}0&1&2&4\\1&1&0&0\\2&0&1&2\\-1&-1&0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$f(1)=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\1&1&2&4\\2&0&1&1\\1&1&4&7\end{vmatrix}=0$$

又知 $f(x)$ 是多项式函数，在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 ξ 为 $f'(x)=0$ 小于 1 的正根。

知识点 3　余子式、代数余子式

更多资源请扫二维码：

3.1　概念

定义 3.1.1　余子式　在 n 阶行列式 $\det(a_{ij})$中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。

定义 2.1.2　代数余子式　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

3.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**2
- **最关联知识点：**知识点 4，知识点 11
- **综述：**余子式和代数余子式的概念是为了得到行列式按照行（列）展开的运算方法而引出的，两者之间或相等或互为相反数，代数余子式与元素所在的位置有关。此知识点的题型主要有两类：一类是由行列式求某个元素的余子式或代数余子式；另一类是由行列式求某行（列）元素代数余子式的代数和，这要用到行列式按行（列）展开定理（定理 4.1.1）。注意，在第 2 篇用伴随矩阵求矩阵的逆时，伴随矩阵也是用矩阵对应

行列式的代数余子式来构造。

3.3 经典例题精解巧析

例 3.3.1（难度系数 0.2，跨知识点 4） 已知 3 阶行列式中第 2 列元素依次为 1,2,3，其对应的余子式依次为 3,2,1，则该行列式的值为________。

解析：此题考查行列式按行或列展开的性质，直接按照第 2 列展开计算即可。

$$1\times(-3)+2\times2+3\times(-1)=-2$$

解：-2。

例 3.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 4） 若行列式 $D=\begin{vmatrix}-8 & 7 & 4 & 3\\ 6 & -2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -7 & 5\end{vmatrix}$，则 D 中第一行元素的代数余子式之和为（　　）。

（A）-1　　（B）-2　　（C）-3　　（D）0

解析：此题千万不要直接计算代数余子式，太麻烦。第一行元素的代数余子式之和即为 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$，注意这里的代数余子式都没有带“尾巴”，即没有乘其对应的元素，如此看来，这些没法用行列式按行（列）展开的性质计算的问题，只要将它看成如下形式：$1\times A_{11}+1\times A_{12}+1\times A_{13}+1\times A_{14}$，就可以“峰回路转”，变成另一个行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 6 & -2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -7 & 5\end{vmatrix}$$

第一行的展开式，即 $1\times A_{11}+1\times A_{12}+1\times A_{13}+1\times A_{14}$。另据行列式的性质可知 $D_1=0$，即 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=0$。

解：（D）。

招数 3.3.1　怪招：求代数余子式时的“凌波微步”—占位法

请大家仔细看看例 3.3.2，明明是求行列式 D 的第一行元素的代数余子式之和，却忽然变成求行列式 D_1。粗看真有点段誉的“凌波微步”的感觉，让人晕乎乎的！实际上，我们可以将行列式的运算规则看成一种“占位法”，它的要点就是只管位置，不管元素，如要求解 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$，可以看成 $1\times A_{11}+1\times A_{12}+1\times A_{13}+1\times A_{14}$，这里的 4 个 1 分别“占领”了 D 按第一行展开式中 -8 ,7,4,3 的位置，D 中这些元素被“占领”之后变成了 D_1，此式变成了 D_1 的第一行的展开式。此方法在行列式中是常用的，大家要仔细领会，若不能领会其精髓，“凌波微步”就会变成“邯郸学步”！

例 3.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 4） 设$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a$，计算$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}$。

解析：本题既考查代数余子式的相关定理及推论，又考查行列式的性质。这是一道综合性强的题目，解题时注意行列式按行与列的展开式及其推论的灵活应用，并且用到招数 3.3.1 中的“占位法”。

解：由题意可得$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{4}A_{1j}+\sum\limits_{i=2}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}$。由于$\sum\limits_{j=1}^{4}a_{1j}A_{1j}=2\sum\limits_{j=1}^{4}A_{1j}=|\boldsymbol{A}|=a$，所以$\sum\limits_{j=1}^{4}A_{1j}=\dfrac{a}{2}$。又因为行列式第一行的元素都为 2，可将$\sum\limits_{j=1}^{4}A_{2j},\sum\limits_{j=1}^{4}A_{3j},\sum\limits_{j=1}^{4}A_{4j}$均等于一个有两行相同的行列式，据行列式的性质得$\sum\limits_{j=1}^{4}A_{2j}=0$，$\sum\limits_{j=1}^{4}A_{3j}=0$，$\sum\limits_{j=1}^{4}A_{4j}=0$。最终可得

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}=\sum_{j=1}^{4}A_{1j}=\frac{a}{2}。$$

知识点 4 行列式按行（列）展开公式

更多资源请扫二维码:

4.1 定理

引理 4.1.1 一个 n 阶行列式 D 中，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那么此行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积，即 $D=a_{ij}\cdot A_{ij}$。

定理 4.1.1 行列式按行（列）展开定理 行列式等于它的任一行（列）各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n)。$$

推论 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0，\ i,j=1,2,\cdots,n，\ i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0，\ i,j=1,2,\cdots,n，\ i\neq j$$

4.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：3**
- **最关联知识点：**知识点 2
- **综述：**除利用行列式的性质外，行列式按照行（列）展开是计算行列式值的另一种常规方法，这两种方法常常结合起来使用。行列式的按行（列）展开实际上是行列式的“降阶”，它除了用来运算外，在证明题中起的作用也不可忽视，如本章的克拉默法则与第 2 章中用伴随矩阵求矩阵的逆均用到了它。本知识点尽量选择单纯用行列式按行（列）展开来计算的题目，而与其他运算方法综合的题目将在知识点 5 中详细介绍。

4.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 3.3.1，例 3.3.2，例 3.3.3

例 4.3.1（难度系数 0.2）　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0\end{vmatrix}$。

解析：当计算高阶行列式时，若某行或某列有较多的“0”，一般方法是先按行（列）展开公式，将行列式降阶后，再利用行列式的性质求解。

解：

$$D=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{2+5}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{=}-10\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}=20\cdot(-42-12)=-1080\text{。}$$

例 4.3.2（难度系数 0.4）　设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$，求第一行各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$，并求此行列式的值。

解析：计算 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ 时可参考招数 3.3.1 中的“占位法”。此“爪形行列式”是比较常见的类型。其解法为利用对角线上的元素将其中一边上的元素化为 0，这样可

以斩断一个“爪子”，使之变为上三角或下三角行列式。

解：第一行各元素的代数余子式之和可以表示为

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}\right)n!=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right)。$$

下面求此行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-1-1-\cdots-1&2&3&\cdots&n\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=(2-n)n!。$$

例 4.3.3（难度系数 0.4）　求 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&1&2\\1&x&1&-1\\3&2&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数。

解析：此类题目在知识点 1 的例 1.3.5 中介绍了一种解法，这里提供另一种解法。若先计算 $f(x)$ 的表达式，则太烦琐，其实只要找出行列式中含有 x^4 与 x^3 的所有项即可。这里用行列式按第一行展开来做。

解：行列式按第一行展开得

$$f(x)=2x\cdot\begin{vmatrix}x&1&-1\\2&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}-x\cdot\begin{vmatrix}1&1&-1\\3&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&x&-1\\3&2&1\\1&1&x\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1&x&1\\3&2&x\\1&1&1\end{vmatrix}。$$

易见 x^4 只能在上式右端的第一项中出现，系数为 2；x^3 只能在上式的右端第二项中出现，系数为 -1。

例 4.3.4（难度系数 0.6）　计算 $D=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}$。

解析：此题的行列式属于“三对角行列式”，它是一种常见的行列式类型。因为它含

有较多的 0，所以选择按行展开的方法，这样可以降低行列式的阶数，最后得到一个递推式。

解：行列式按第一行展开，得

$$D \triangleq D_5 = (1-a)A_{11} + aA_{12}$$
$$= (1-a)D_4 - a \cdot \begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$
$$= (1-a)D_4 + aD_3。$$

一般地，有递推式 $D_n = (1-a)D_{n-1} + aD_{n-2}$，于是

$$D_1 = 1-a，\ D_2 = \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = 1-a+a^2，$$

$D_3 = (1-a)D_2 + aD_1 = 1-a+a^2-a^3$，$D_4 = (1-a)D_3 + aD_2 = 1-a+a^2-a^3+a^4$，

$D_5 = (1-a)D_4 + aD_3 = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$。

知识点 5　计算行列式的方法

更多资源请扫二维码:

5.1　结论、公式

1．结论

结论 5.1.1　计算行列式的方法

（1）化上三角形行列式法；

（2）按行（列）展开法；

（3）数学归纳法；

（4）递推法；

（5）特殊行列式法；

（6）加边法。

具体介绍请参见 5.3 节各例题中的解析。

2．公式

公式 5.1.1　范德蒙德行列式的值

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)。$$

公式 5.1.2　$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵）

5.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 1，知识点 3，知识点 4
- **综述**：计算行列式的方法很多，主要有结论 5.1.1 中列举的 6 种，其中前两种是最基本的，这些方法常常结合起来使用。在考研题中单纯计算行列式的题目比较少，即使有也不会涉及太多技巧，建议针对过于重视技巧的题目大家稍作了解即可，不必过多深究。在“特殊行列式法”中，公式 5.1.1、5.1.2 中的两类行列式的值必须熟记。

5.3　经典例题精解巧析

例 5.3.1（难度系数 0.6）　求 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$。

解析：行列式所有的行均减去第一行后，变成“爪形行列式”，再通过列变换变为上三角行列式，这是结论 5.1.1（1）的方法：化上三角形行列式法。此方法最基础也最常见。

解：$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\\vdots\\r_n-r_1}}{=}\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\-a_1&a_2&0&\cdots&0\\-a_1&0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{c_1+\frac{a_1}{a_2}c_2\\\vdots\\c_1+\frac{a_1}{a_n}c_n}}{=}\begin{vmatrix}1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_1}{a_i}&1&1&\cdots&1\\0&a_2&0&\cdots&0\\0&0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n\ 。$$

例 5.3.2（难度系数 0.6） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix}$，求$|\boldsymbol{A}|$。

解析：因为行列式每一列的和为同一常数，故把所有的行均加到第一行，提出第一行的公因子，最后用化上三角形行列式法。

解：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=\left[a+\dfrac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$

$$=\left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=a^{n-1}\left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]=a^n+\frac{n(n+1)}{2}a^{n-1}$$

例 5.3.3（难度系数 0.8） 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b\end{vmatrix}_{n\times n}$$

解析: n 阶行列式可看作一个数列的通项。本题先利用行列式的按行（列）展开定理得到一个递推式，再通过递推式推导出行列式的值。这是利用了结论 5.1.1（2）中的行列式按行（列）展开法及结论 5.1.1（4）中的递推法。注意，递推法与数学归纳法一般都会结合按行（列）展开法来使用。

解：原式= $(-1)^{1+1}(a+b)\begin{vmatrix}a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

$$+(-1)^{1+2}ab\begin{vmatrix}1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=(a+b)I_{n-1}-abI_{n-2}$$

于是可得递推关系式 $I_n=(a+b)I_{n-1}-abI_{n-2}=aI_{n-1}+b(I_{n-1}-aI_{n-2})$，即

$$I_n-aI_{n-1}=b(I_{n-1}-aI_{n-2}),$$

故有

$$I_n-aI_{n-1}=b^2(I_{n-2}-aI_{n-3})=\cdots=b^{n-2}(I_2-aI_1),$$

其中

$$I_1=|a+b|=a+b，I_2=\begin{vmatrix}a+b & ab\\ 1 & a+b\end{vmatrix}=a^2+b^2+ab$$

因此

$$I_n-aI_{n-1}=b^{n-2}(I_2-aI_1)=b^{n-2}\left[(a^2+b^2+ab)-(a^2+ab)\right]=b^n,$$

即 $I_n=b^n+aI_{n-1}$。于是有

$$\begin{aligned}I_n&=b^n+aI_{n-1}=b^n+a(b^{n-1}+aI_{n-2})\\&=b^n+a\left[b^{n-1}+a(b^{n-2}+aI_{n-3})\right]=\cdots\\&=b^n+ab^{n-1}+a^2b^{n-2}+\cdots+a^{n-1}b+a^n。\end{aligned}$$

当 $a=b$ 时，

$$I_n=a^n+a^n+\cdots+a^n+a^n=(n+1)a^n;$$

当 $a\neq b$ 时，

$$I_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}。$$

注：数学归纳法与递推法有些类似。它们的差别在于递推法得到的递推式是从项数高往项数低的方向推导，而数学归纳法是从项数低往项数高的方向假设。递推法无须另外证明，而数学归纳法因为开始是归纳假设，所以需要作严格的证明。在作归纳假设时，若归纳的项数太少所得到的规律往往是不全面甚至是错误的，所以最好多归纳几项。这里不举用数学归纳法求解行列式的例子，具体见本篇综合测试题 1.14。

例 5.3.4（难度系数 0.6）求下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix}a & 0 & b & 0 & c & 0\\ d & a & e & b & f & c\\ b & 0 & c & 0 & a & 0\\ g & b & h & c & j & a\\ c & 0 & a & 0 & b & 0\\ k & c & l & a & m & b\end{vmatrix}。$$

解析：此题中行列式的元素看起来杂乱无章，但仔细观察其中元素“0”的位置，可发现这里的 9 个“0”排列得很有规律！由此可想象：能否将元素“0”全移至右上角变成$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵）的形式，从而可直接套用结论$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$呢？这毕竟是个思路，试一试，发现果然能成功！这里用到结论 5.1.1（5）的特殊行列式法。

解：

$$
\text{原式} \overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_5\leftrightarrow r_4\\ r_4\leftrightarrow r_3}}{=} -\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ d & a & e & b & f & c \\ g & b & h & c & j & a \\ k & c & l & a & m & b \end{vmatrix} \overset{\substack{c_4\leftrightarrow c_5\\ c_2\leftrightarrow c_3\\ c_3\leftrightarrow c_4}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ b & c & a & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & a & b & c \\ g & h & j & b & c & a \\ k & l & m & c & a & b \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (3acb-c^2-a^2-b^2)^2 \text{。}
$$

例 5.3.5（难度系数 0.4）　计算下列行列式的值

$$
\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \text{。}
$$

解析：用结论 5.1.1（5）中的方法。此$n+1$阶行列式不是范德蒙德行列式，故不能直接套用其公式计算。首先要利用行列式的性质作适当的变换，然后将其变为范德蒙德行列式，再套用相应的公式求解。

解：第一次变换将第一行与末行对调，第二次将新行列式中第二行与倒数第二行对调……以此类推，n 是奇数时对换$\dfrac{n+1}{2}$次，n 是偶数时对换$\dfrac{n}{2}$次。于是

$$
\text{原式}=(-1)^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}
$$

$$=(-1)^k\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left[(a-i-1)-(a-j-1)\right]$$
$$=(-1)^k\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(j-i),$$

其中 $k=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n=2k\\ \dfrac{n+1}{2}, & n=2k-1\end{cases}$，$k\in\mathbb{Z}^+$。注意到 k 与 $\dfrac{(n+1)n}{2}$ 同奇偶性，所以

$$\text{原式}=(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(j-i)。$$

例 5.3.6（难度系数 0.6）　计算行列式

$$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4\end{vmatrix}，（a_1,a_2,a_3,a_4\neq 0）。$$

解析：现在介绍一种不易想到的结论 5.1.1（6）中的方法：加边法。此题看起来也可以用各行加到第一行的方法，但是仔细一看行不通，因为加起来后并不能达到第一行的值相同的效果。假若将它想象成某更高阶行列式按照行（列）展开的某一项，能否行得通呢？若人为地增加某一行，使得行列式便于计算，比如此题可增加元素均为 1 的一行，这就是加边法。

$$\textbf{解：}\text{原式}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+a_3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1+a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & a_1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & a_2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & a_3 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}=(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i})a_1a_2a_3a_4。$$

知识点 6　克拉默法则

更多资源请扫二维码:

6.1　概念、定理

1. 概念

定义 6.1.1　n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般形式　含有 n 个线性方程、n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{6.1}$$

当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，称此方程组为齐次线性方程组。

定义 6.1.2　方程组的系数行列式　由方程组（6.1）的系数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 元线性方程组（6.1）的系数行列式。

2. 定理

定理 6.1.1　克拉默法则　如果线性方程组（6.1）的系数行列式 D 不等于零，那么此方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中，D_j $(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

定理 6.1.2　如果线性方程组（6.1）的系数行列式 $D\neq0$，则此方程组一定有解，且解是唯一的。

定理 6.1.3　如果线性方程组（6.1）无解或有两个不同的解，则它的系数行列式 D 必为零。

定理 6.1.4　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

的系数行列式 $D\neq 0$，则此齐次线性方程组仅有零解。

定理 6.1.5　如果齐次线性方程组（6.2）有非零解，则它的系数行列式必为零。

6.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：1**
- **最关联知识点：**知识点 4，知识点 41
- **综述：**克拉默法则是用来求解特殊线性方程组的，实际上，求一般线性方程组的解基本上不会用它，因为相比之下用矩阵的初等行变换更简便。退一步说，即使用此法则求解，它也有很大的局限性，即当系数行列式的值为 0 时克拉默法则失效（这是克拉默法则的否命题，系数行列式为 0 时其对应方程组有无穷多解或无解，这需要到第 4 篇才能解决）。克拉默法则仅在求解线性方程组的理论方面有较大的价值。

6.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 30.3.1

例 6.3.1（难度系数 0.4）　设有方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 + \cdots + a_1^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 + \cdots + a_2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 + \cdots + a_3^{n-1}x_n = 1 \\ \cdots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2x_3 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$$

其中 $a_i \neq a_j\ (i\neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则此线性方程组的解为___________。

解析：因为方程组未知数的个数与方程的个数相同，并注意到系数行列式为范德蒙德行列式且不为零，所以考虑用克拉默法则。

因为系数行列式 D 是范德蒙德行列式，由 $a_i \neq a_j$ 知

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0,$$

再由克拉默法则知原方程组有唯一解，又因为

$$D_1=D,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & 1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ 1 & 1 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=0,$$

同理 $D_3=D_4=\cdots=D_n=0$，故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=x_3=\cdots=x_n=\frac{0}{D}=0。$$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解为 $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ x_3=0\\ \quad\vdots\\ x_n=0\end{cases}$。

解：$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ x_3=0\\ \quad\vdots\\ x_n=0\end{cases}$。

例 6.3.2（难度系数 0.2）　设齐次方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+2x_3=0\\ x_1+ax_2+x_3=0\\ x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 只有零解，求 a 满足的条件。

解析：齐次线性方程组仅有零解等价于它有唯一解。其充分必要条件为系数行列式不等于 0。

解：齐次线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 2\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 1-a & 2+a\\ 1 & a-1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(1-a)(4+a),$$

因为齐次方程组只有零解，由克拉默法则知 D 的值不为 0，即 $(1-a)(4+a)\neq 0$，得 $a\neq 1$ 且 $a\neq -4$。

例 6.3.3（难度系数 0.4）　有甲、乙、丙三种化肥，甲化肥每千克含氮 70 克、磷 8 克、钾 2 克；乙化肥每千克含氮 64 克、磷 10 克、钾 0.6 克；丙化肥每千克含氮 70 克、磷 5 克、钾 1.4 克。若三种化肥混合，要求总重量 23 千克且含磷 149 克、钾 30 克，问三种化肥各需多少千克？

解析：把三种化肥混合后，其中含有甲、乙、丙各 x_1、x_2、x_3 千克，则 $x_1+x_2+x_3=23$，再根据三种化肥含磷、钾的比例，即可列出一个由三个方程组成的方程组，根据克拉默法则求解。

解：设甲、乙、丙三种化肥各需 x_1、x_2、x_3 千克，依题意得方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=23 \\ 8x_1+10x_2+5x_3=149 \\ 2x_1+0.6x_2+1.4x_3=30 \end{cases}$$

此方程组的系数行列式 $D=-\dfrac{27}{5}$，又可求得 $D_1=-\dfrac{81}{5}$，$D_2=-27$，$D_3=-81$。由克拉默法则，此方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=5$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=15$。即甲、乙、丙三种化肥各需 3 千克、5 千克、15 千克。

第1篇综合测试题

1.1（知识点 1，难度系数 0.2）　4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}a_{34}$ 的项为（　）。

（A）$a_{11}a_{23}a_{34}a_{41}$　　（B）$-a_{11}a_{23}a_{34}a_{43}$

（C）$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$　　（D）$-a_{11}a_{23}a_{34}a_{44}$

1.2（知识点 1，难度系数 0.4）　n 阶行列式 D 的值为 c，若将 D 的所有元素改变符号，得到行列式的值为________。

1.3（知识点 1，难度系数 0.4）$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为__________。

1.4（知识点 2，难度系数 0.6）　设 $D_1=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$，$(abc\neq 0)$，则 D_1 与 D_2 的关系为（　）。

（A）$D_1=D_2$　（B）$D_2=(abc)D_1$　（C）$D_2=\dfrac{1}{(abc)}D_1$　（D）$D_2=\dfrac{1}{(abc)^2}D_1$

1.5（知识点 2，难度系数 0.4）　$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix}=$（　）。

（A）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$　（B）$\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}$　（C）$2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$　（D）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

1.6（知识点 3、4，难度系数 0.4）　已知 4 阶行列式中第 1 行的元素依次为 $-4,0,1,3$，第 3 行元素的余子式依次为 $-2,5,1,x$，则 $x=$（　）。

（A）0　（B）-3　（C）3　（D）2

1.7（知识点 3，难度系数 0.6）　已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -12 & 134 \end{vmatrix}$，求：

（1）D 的第 4 行元素的代数余子式之和。

（2）D 的第 4 行元素的余子式之和。

1.8（知识点 3，难度系数 0.6）　设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-6$，$A_{4j}$ 为 $a_{4j}(j=1,2,3,4)$ 的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}=$________，$A_{43}+A_{44}=$________。

1.9（知识点 4，难度系数 0.6）　求 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值。

1.10（知识点 4，难度系数 0.6）　设 $A_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$，试证 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为等差数列，并由此求 A_n。

1.11（知识点 5，难度系数 0.4）　行列式 $D=\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 10 & 2 & 9 & -5 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}=$________。

1.12（知识点 5，难度系数 0.4）　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$。

1.13（知识点 5，难度系数 0.8）　设 $a_{ij}=|i-j|$（$i,j=1,\cdots,n$），求行列式 $\det(a_{ij})$ 的值。

1.14（知识点 5，难度系数 0.6）　试证 n（$n\geqslant 2$）阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n。$$

1.15（知识点 6，难度系数 0.4）　用克拉默法则解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 25 \end{cases}$$

1.16（知识点 6，难度系数 0.2） 证明：无论 a 取何值，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 - ax_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

均仅有零解。

第 1 篇综合测试题详解

1.1 解析：根据行列式的定义，行列式每一项的因子必须来自不同的行和列，故该项的另一个元素为 a_{42}，即该项（不含符号）为 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，又由排列 1342 的逆序数为 2，故符号为正。

解：（C）

1.2 解析：设将行列式 D 改变所有元素符号后变为 D_1，据行列式的概念式，则有 $D_1=\sum(-1)^t(-a_{1p_1})(-a_{2p_2})\cdots(-a_{np_n})=(-1)^n\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^n D=(-1)^n c$。

解：$(-1)^n c$

1.3 解析：同例 1.3.5 的分析方法，因为最后一列不含 x 且其他列不含 x 的高次幂，所以为了取到含 x^3 的项，除最后一列外的每一列均需取到含 x 的项，这样的项仅有两个：$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x^3$ 与 $-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-2x^3$，合并得 x^3 的系数为−1。

解：−1

1.4 解析：此题直接计算有些复杂。仔细观察两个行列式之间的异同，可先利用若干列变换及行变换将 D_1 的第一行及第一列除 a_{11} 之外全变成 1，这是容易办到的，然后再设法通过若干列变换与行变换往 D_2 上靠。

$$D_1=\begin{vmatrix}0&a&b&c\\a&0&c&b\\b&c&0&a\\c&b&a&0\end{vmatrix}\overset{\substack{c_2\div a\\c_3\div b\\c_4\div c}}{=}abc\begin{vmatrix}0&1&1&1\\a&0&\frac{c}{b}&\frac{b}{c}\\b&\frac{c}{a}&0&\frac{a}{c}\\c&\frac{b}{a}&\frac{a}{b}&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2\div a\\r_3\div b\\r_4\div c}}{=}a^2b^2c^2\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&\frac{c}{ab}&\frac{b}{ac}\\1&\frac{c}{ab}&0&\frac{a}{bc}\\1&\frac{b}{ac}&\frac{a}{bc}&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_2\times abc\\c_3\times abc\\c_4\times abc}}{=}\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}0&abc&abc&abc\\1&0&c^2&b^2\\1&c^2&0&a^2\\1&b^2&a^2&0\end{vmatrix}\overset{r_1\div abc}{=}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&c^2&b^2\\1&c^2&0&a^2\\1&b^2&a^2&0\end{vmatrix}=D_2$$

解：（A）

1.5 解析：由行列式的性质 2.1.1（5）得

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ p & q+r & r+p \\ x & y+z & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ q & q+r & r+p \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ p & q+r & r \\ x & y+z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ q & r & r+p \\ y & z & z+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

解：（C）

注意：如上行列式的“拆项”与矩阵加法的“拆项”不同，它要逐行或逐列拆。

1.6 解析：因为行列式第 1 行元素与第 3 行元素的代数余子式对应相乘等于 0，故

$$\begin{aligned} &-4\times A_{31}+0\times A_{32}+1\times A_{33}+3\times A_{34} \\ &=-4\times M_{31}+0\times(-M_{32})+1\times M_{33}+3\times(-M_{34}) \\ &=-4\times(-2)+0\times(-5)+1\times1+3\times(-x)=0 \end{aligned}$$

解得 $x=3$。

解：（C）

1.7 解析：（1）类似例 3.3.2 的解析。

（2）这里求行列式 D 的第 4 行各元素余子式之和，当然可以直接计算，但那样需要计算 4 个 3 阶行列式，计算量较大。而利用余子式与代数余子式的关系，可将第 4 行各元素余子式之和化为第 4 行各元素代数余子式之和，最终根据招数 3.3.1 的“占位法”化为另一行列式按第 4 行的展开式。

解：（1） $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

（2）根据余子式与代数余子式的关系，得

$$
\begin{aligned}
&M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}\\
&=(-1)\times(-1)^{4+1}M_{41}+1\times(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)\times(-1)^{4+3}M_{43}+1\times(-1)^{4+4}M_{44}\\
&=(-1)\times A_{41}+1\times A_{42}+(-1)\times A_{43}+1\times A_{44}\\
&=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-28
\end{aligned}
$$

1.8 解析：此题有一定难度。观察行列式的第 2、4 两行可得到启发。将行列式按第 4 行展开，得

$$A_{41}+A_{42}+2A_{43}+2A_{44}=-6$$

再将行列式第 2 行的元素与第 4 行的代数余子式对应相乘，又得

$$3A_{41}+3A_{42}+4A_{43}+4A_{44}=0$$

两式合起来并解之得 $A_{41}+A_{42}=12,\ A_{43}+A_{44}=-9$

解：12； −9

1.9 解析：行列式按最后一行展开，再按第一行展开即得。

解：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}_n
&=a\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a\end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1\\ a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & a & 0\end{vmatrix}_{n-1}\\
&=a\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a\end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a\end{vmatrix}_{n-2}\\
&=a^n-a^{n-2}
\end{aligned}
$$

1.10 解析：将行列式按照第一列展开即可得到一个递推式。

解：行列式按第一列展开可得

$$A_n=2A_{n-1}-A_{n-2}$$

所以

$$A_n-A_{n-1}=A_{n-1}-A_{n-2}$$

即 $\{A_n\}$ 为等差数列。容易计算：

$$A_1=2，A_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=3，A_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{vmatrix}=4$$

所以公差 $d=1$，$A_n=n+1$

1.11 解析：用解行列式的结论 5.1.1（5）即特殊行列式法，实际上用到了行列式的定义。这个看起来由杂乱无章的一堆数字构成的行列式，其实仔细看还是可找到规律的。先利用行列式的性质对换一些行和列，将元素“0”全聚集在一起，可将原行列式变为如下形式：

$$D=-\begin{vmatrix}7 & 2 & -3 & 7 & 3\\10 & 2 & 9 & 1 & -5\\-2 & 0 & 0 & 0 & 13\\9 & 0 & 0 & 0 & 21\\11 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

可见变换后的行列式中有 3×3 的一块元素均为 0，根据行列式的定义式

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{5p_5}$$

行列式的每一项均需要每行每列各取一个元素。仔细观察可见，当取到第 3 至第 5 行时，假如要保证取到的项其值非零，则需要对应 3 个不同列的元素均非零，对于 D 是做不到的，因此行列式 D 的值为 0。

解：0

1.12 解析：用解行列式的结论 5.1.1（2）即行列式按行（列）展开法。此题中的行列式的特点是各行元素之和相等，均为 x。遇到行或列相加之和相等时，先将各行或各列加在一起，最后按照第 4 行展开即可。

解：$$D=x\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\1 & -1 & x+1 & -1\\1 & x-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{\underset{\substack{c_3-c_1\\c_4+c_1}}{=}}x\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\1 & 0 & x & 0\\1 & x & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=x\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} & & x\\ & x & \\x & & \end{vmatrix}=x^4$$

1.13 解析：用解行列式的结论 5.1.1（1）即化上三角行列式法。从第 n 行开始，依次用下面一行减去上面一行，再把第 n 列加到前面各列，可以化为上三角行列式。

解：$$\det\left(a_{ij}\right)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1\\n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1\\1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

1.14 解析：用解行列式的结论 5.1.1（3）即数学归纳法，结合行列式按照行（列）展开式。

证明：用数学归纳法证明行列式

（1）当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x(x+a_1)-(-1)\cdot a_2=x^2+a_1x+a_2$$

命题成立。

（2）假设 $n=k$ 时命题成立，即

$$D_k=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k$$

成立。

将 D_{k+1} 按第一列展开。

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+(-1)^{k+1+1}a_{k+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\left(x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k\right)+(-1)^{k+2}a_{k+1}(-1)^k$$

$$=x^{k+1}+a_1x^k+a_2x^{k-1}+\cdots+a_kx+a_{k+1}$$

这就证明了 $n=k+1$ 时命题也成立。

综合（1）、（2），原命题成立。

1.15 解析：常规题。注意对应行列式均为范德蒙德行列式，可套用其结论。

解：据克拉默法则，且套用范德蒙德行列式的结论，得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(4-3)=2$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&3&4\\25&9&16\end{vmatrix}=(3-5)(4-5)(4-3)=2$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&5&4\\4&25&16\end{vmatrix}=(5-2)(4-2)(4-5)=-6$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&5\\4&9&25\end{vmatrix}=(3-2)(5-2)(5-3)=6$$

因此得原方程组的解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{2}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-6}{2}=-3,x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{6}{2}=3$$

1.16 解析：齐次方程组有唯一解等价于它仅有零解。根据克拉默法则，可判断其系数行列式是否非零。

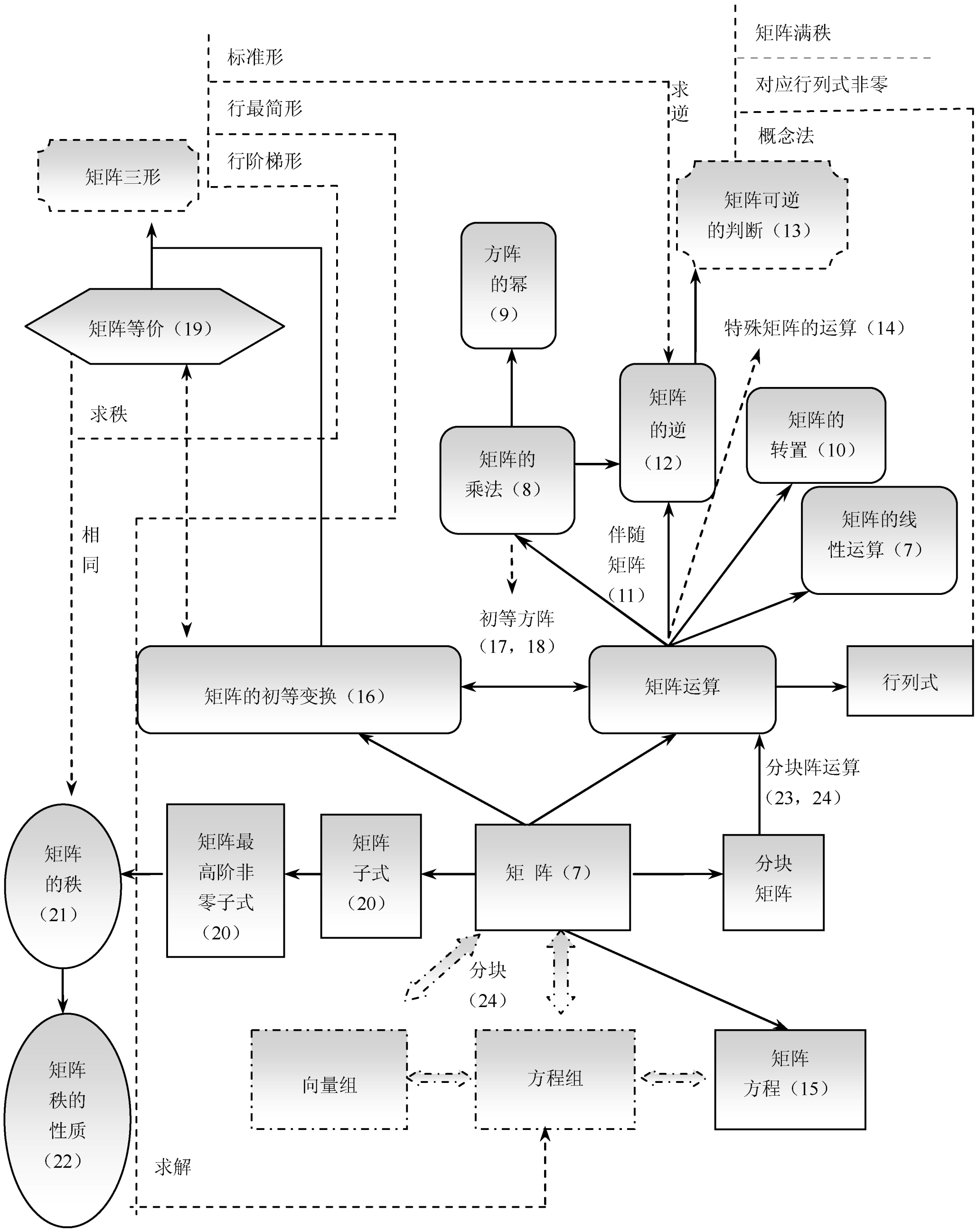
解：方程组对应的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\-1&-a&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&1-a&3\end{vmatrix}=3+(1-a)^2>0$$

据克拉默法则，无论 a 取何值，齐次方程组均仅有零解。

第2篇　矩阵

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

第 2 篇

综　述

矩阵和向量组是线性代数课程的两个工具。相比于向量组，矩阵的优势更明显，因为本课程的绝大多数问题最终都可以归于矩阵问题，所以矩阵是本课程的核心。

本章分为两大部分：矩阵的运算与初等变换。矩阵的运算包括线性运算即加法与数乘(7)、矩阵的乘法(8)与方阵的幂(9)、矩阵的转置(10)、伴随矩阵(11)与矩阵的逆(12)(13)、方阵的行列式等，因为矩阵是“有序的数组”，其运算也是有序的运算，所以要注意其中包含的“序”的思想。特别要注意一些特殊矩阵的运算(14)。在矩阵的各类运算中，最重要的是矩阵的乘法。从 0.1 节中的框图可以看出，矩阵乘法可以表示矩阵的初等变换，还可以表示线性方程组、线性变换、二次型，向量组间的线性表示也可以用它来描述，可见其应用范围之广。除矩阵乘法之外，矩阵的逆也较为重要。大家要特别注意矩阵的运算与数的四则运算的区别和联系，尤其是运算律，比如矩阵的乘法不满足交换律和消去律，还要注意矩阵各类运算需要满足的条件，这在求解矩阵方程(15)中显得特别重要。

因为矩阵的乘法运算与矩阵的初等变换(16)有直接的对应关系，且它们可通过初等方阵(17)联系起来(18)，所以可以认为矩阵乘法是矩阵的初等变换的另一种表示形式（即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$，$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 为可逆方阵）。矩阵在初等变换下的不变量是矩阵的秩(21)(22)，矩阵初等变换前后的矩阵是等价的(19)。需要特别强调的是，“等价”的思想为本课程的中心思想，它可以和高等数学课程中“极限”的思想相媲美。矩阵在初等变换下可等价地化简为三种形式，即行阶梯形、行最简形与标准形，我们称之为“矩阵三形”，它们可以各自解决一类大问题：用矩阵的行阶梯形可以求矩阵的秩，用矩阵的行最简形可以求线性方程组的解（参见第 4 篇），用矩阵的标准形可以求矩阵的逆。因此可以这么说，只要熟练掌握矩阵的初等变换，本课程就学好了一半。

若按照概念来求矩阵的秩，则需要求它的最高阶非零子式(20)，此方法比较烦琐，简便的方法是使用矩阵的行阶梯形，其非零行的行数即为矩阵的秩。

特别需要注意的是矩阵的分块[23]，这部分内容大家容易忽视，认为它仅仅是矩阵运算的一种技巧而已。实际上，缺少了矩阵的分块，本课程将变得无比松散！因为矩阵的分块是连接矩阵、向量组与线性方程组的纽带。线性代数课程内容的总纲就是“一个问题”即解线性方程组，两个工具即矩阵与向量组，它们呈“三足鼎立”之势，但它们都可以通过矩阵的分块紧密地联系起来，互为工具地解决问题，无论在理论上还是实际运用上，矩阵的分块均能大放异彩[24]。在教材中，矩阵的分块的应用除了本篇矩阵求逆外，第 3 篇中证明矩阵的秩与对应行（列）向量组的秩相等，第 4 篇中求非齐次线性方程组的解，第 5 篇中矩阵的相似对角化问题及第 6 篇中二次型的矩阵表示等，都应用到了该知识。

注：文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握，并根据自己的实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

更多资源请扫二维码:

知识点 7　矩阵的概念、线性运算及运算律

更多资源请扫二维码:

7.1　概念、运算律

1．概念

定义 7.1.1　矩阵　由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中，a_{ij} 位于矩阵的第 i 行第 j 列，称为矩阵的第（i，j）元。

一般情况下用大写英文字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵。$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 。

定义 7.1.2　$\boldsymbol{n}$ 阶方阵　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数都等于 n，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记为 $\boldsymbol{A}_n$。

定义 7.1.3　行矩阵　只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 称为行矩阵，又称行向量。行矩阵也记为 $\boldsymbol{A}=$（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）。

定义 7.1.4　列矩阵　只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量。

定义 7.1.5　同型矩阵　两个矩阵的行数相等，列数也相等时，就称它们是同型矩阵。

定义 7.1.6　零矩阵　所有元素均为 0 的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$。

定义 7.1.7　单位矩阵　n 阶方阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为 n 阶单位矩阵，简称单位阵。

定义 7.1.8　对角矩阵　主对角线以外的元素全为零的方阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵，简称对角阵。对角阵也记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

定义 7.1.9　矩阵的加法　设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 加法（和）记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 7.1.10　矩阵的数乘　数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 7.1.11　共轭矩阵　当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为复矩阵时，用 $\overline{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})$。$\overline{\boldsymbol{A}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵。

2．运算律

运算律 7.1.1　矩阵加法的运算律　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

运算律 7.1.2　矩阵数乘的运算律　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 是数，则

（1）$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$

（3）$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$

运算律 7.1.3　共轭矩阵的运算律　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为复矩阵，λ 为复数，且下列运算都是可行的，则

（1）$\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$

（2）$\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{A}}$

（3）$\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$

7.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频：** 1
- **最关联知识点：** 知识点 14
- **综述：** 矩阵的概念十分简单，它就是一个二维的矩形数表。除此之外，本知识点还介绍了矩阵的加法与数乘两种运算（即矩阵的线性运算），以及矩阵的共轭运算。可以说这是本课程中最简单的知识点。这里不仅要求大家牢记许多特殊类型的矩阵，还需特别注意比较矩阵与行列式概念的不同之处：矩阵是数表，而行列式为方阵的一种运算。

7.3 经典例题精解巧析

例 7.3.1（难度系数 0.2） 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&5&7&2\\2&0&4&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&1&5&7\\0&6&4&8\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$。

解析： 此题为解矩阵方程。矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 已知，易得 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$，代入计算即可。

解： 由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-2&-5&-2\\0&1&1&4\\0&5&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-\frac{5}{2}&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\\0&\frac{5}{2}&1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

例 7.3.2（难度系数 0.2）下列等式中，正确的是（ ）。

（A）$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&3\\3&2&4\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-2&-3&-4\end{pmatrix}=0$ （D）$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

解析： 矩阵的加法必须是每个对应元素相加而不能仅加一行，故（A）错误；只有同型矩阵才能做加法，故（B）错误；矩阵加法运算的结果不是数而是矩阵，故（C）错误；（D）符合概念，正确。注意不要将矩阵的加法和行列式的加法相混淆。

解：（D）

知识点 8　矩阵的乘法运算及运算律

更多资源请扫二维码:

8.1　概念、运算律

1. 概念

定义 8.1.1　矩阵与矩阵相乘　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是一个 $s\times n$ 矩阵，规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad（i=1,2,\cdots,m；j=1,2,\cdots,n）$$

记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$

2. 运算律

运算律 8.1.1　矩阵乘法的运算律（设下列矩阵都可以进行有关运算）

（1）结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

（2）λ（$\boldsymbol{AB}$）$=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$（其中$\lambda$为数）

（3）右分配律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

（4）左分配律　$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$

8.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 9
- **综述**：矩阵乘法是矩阵最重要的运算，其重要性在本篇综述中已经说明，这里不再赘述。学习矩阵乘法可分为三个步骤：第一步是按部就班地掌握具体矩阵的乘法运算及其运算律；第二步是掌握抽象矩阵的计算及运算律，注意它不满足交换律与消去律（选择题中容易利用这一点布下“陷阱”）。若将抽象矩阵的乘法与方阵的行列式、矩阵的转置相联系，则可出现不少有趣的题目。第三步是总结矩阵乘法所能描述的对象，并结合矩阵的分块，将之与线性方程组、向量组联系起来求解综合题。本知识点的题目仅涉及前两步，且重点在第二步。

8.3 经典例题精解巧析

例 8.3.1（难度系数 0.2） 已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则下列等式中不正确的是（ ）。

（A）$(\boldsymbol{AB})^n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n$ （B）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

（C）$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ （D）$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$

解析：因为矩阵乘法满足结合律与左右分配律，故（B）、（C）、（D）正确。因为矩阵乘法没有交换律，所以 $(\boldsymbol{AB})^n=\underbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}_{n个}\neq\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n$，故（A）错误。

解：（A）

注：$(\boldsymbol{AB})^n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n$ 很容易造成“没有用到交换律”的错觉。又如 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 也是错误的，道理同上。

例 8.3.2（难度系数 0.4）设有两个上三角阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$。由此假设结论：两个上三角阵的乘积仍为上三角阵，并证明此结论。

解析：求 $\boldsymbol{AB}$ 是基础题。在后面的证明中，要注意如何合理叙述使之言简意赅：对上三角阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，最简洁的描述就是：当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$。

解： $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&1&-7\\0&1&4&1\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

下面证明结论：两个上三角阵的乘积仍然为上三角阵。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为两个 n 阶上三角阵，即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=b_{ij}=0$。

设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，当 $i>j$ 时，对 k 可分下面两种情形讨论：

（1）当 $i>k$ 时，$a_{ik}=0$，对应项 $a_{ik}b_{kj}=0$；

（2）当 $i\leqslant k$ 时，据 $i>j$，有 $k>j$，则 $b_{kj}=0$，对应项 $a_{ik}b_{kj}=0$。

总之，当 $i>j$ 时，对于 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，等式右边每一项的值均为 0，故 $c_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为上三角阵。

例 8.3.3（难度系数 0.6） 已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$ 与 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，试证：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$。

解析：首先将 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 展开，立即可得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。下面只需要证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

即可。在等式$(A-B)^2=A+B$的左右两端分别乘$A-B$，将得到令人惊喜的结论。具体解释见招数 8.3.1 的“险招”。

证明：因为$(A-B)^2=A+B$，所以在等式左右两端分别左乘、右乘$A-B$，即

$$(A-B)^3=(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B),$$

于是$A^2-BA+AB-B^2=A^2+BA-AB-B^2$，　所以得$AB=BA$。

因为$(A-B)^2=A+B$，展开即$A^2-AB-BA+B^2=A+B$，又因为$A^2=A$，$B^2=B$，所以$2AB=O$，故$AB=BA=O$。

招数 8.3.1　险招：矩阵乘法不满足交换律，用结合律与分配律来弥补。

由于矩阵乘法不满足交换律，因此凡是涉及在一定限制条件下矩阵乘法的交换问题均为难点，常用的方法是将已知的等式分别左乘或右乘相关式子试一试，然后利用矩阵乘法的分配律及结合律，这样可以弥补矩阵乘法没有交换律的不足。此招有点“险”，因为左乘或右乘相关的式子需要“凑”出来，感觉“偶然”的因素较大，例 8.3.3 即为典型例子。

知识点 9　计算方阵的幂

更多资源请扫二维码:

9.1　概念、结论

1．概念

定义 9.1.1　方阵的幂　方阵的幂规定如下。

（1）当$n\geqslant 1$时，$A^n=AA\cdots A$（n个A）

（2）当$n=0$时，$A^n=A^0=E$

（3）当$n<0$时，$A^n=A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}$（$n$个$A^{-1}$）（注：方阵$A$须可逆）

2．结论

结论 9.1.1　方阵的幂的运算律

（1）$(A^n)^m=(A^m)^n=A^{mn}=AA\cdots A$（$m\times n$个$A$）

（2）$A^mA^n=A^{m+n}$

9.2 知识点及解题方法综述

● **知识点考频**：3

● **最关联知识点**：知识点 8

● **综述**：方阵的幂是矩阵乘法的一种特殊情形，只有方阵才有幂运算。若求方阵的低次幂，直接运用矩阵乘法的运算律即可，而高次幂往往需要通过找规律来求解。其常用的方法有数学归纳法、特殊矩阵的拆解法与矩阵的相似法（参见第 5 篇知识点 50，此知识点不举例）等。注意：方阵的负次幂实际上与方阵的逆有关。

9.3 经典例题精解巧析

例 9.3.1（难度系数 0.4） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解析：直接计算很烦琐。先作拆解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，然后按照二项式展开。形如$\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$的二项展开式容易求，因为单位阵与任何矩阵相乘均可交换（前提是运算能够进行），且$\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{O}$，因此只需要求前几项即可。

解：因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{O}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=(\lambda\boldsymbol{E})^n+C_n^1(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2\\&=\lambda^n\boldsymbol{E}+C_n^1\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2\lambda^{n-2}\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

招数 9.3.1 绝招：用二项展开式计算可分解成形如“$\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$”的矩阵的幂。

由于矩阵的乘法没有交换律，所以两个矩阵和的幂不能用二项展开式展开，但若其中一个矩阵为数量矩阵，即“$\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$”的形式，情况就不一样了，由于数量矩阵与任一矩阵相乘时均有交换律，所以可使用二项展开式，即

$$\left(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\lambda\boldsymbol{E}\right)^i\boldsymbol{A}^{n-i}。$$

一般情况下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂次稍高时将变为 $\boldsymbol{O}$，这样将大大地简化计算。

例 9.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 10）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$，$n\in\mathbb{N}$。

解析：如果直接计算 $\boldsymbol{A}^n$，计算量将十分巨大，显然不可取。注意到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素都是两个字母的乘积，且有规律：第一行中含有公因子 a_1，第二行含有公因子 a_2，……，第 n 行含有公因子 a_n，因此可以将 $\boldsymbol{A}$ 先化成列矩阵与行矩阵相乘的形式，再进一步计算 $\boldsymbol{A}^n$。

解：因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，所以

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^n=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}。$$

又 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 是一个数，故

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^{n-1}\boldsymbol{A}。$$

招数 9.3.2　妙招：矩阵乘法中的“乾坤大挪移”。

矩阵的乘法虽然没有交换律，但是有结合律。矩阵的结合律为矩阵的乘法运算尤其是幂运算提供了很大的技巧空间，其中有一种技巧可形象地称为“乾坤大挪移”，即通过矩阵乘法的结合律达到类似于交换律的目的。如

$$(\boldsymbol{AB})^n=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{n-1}\boldsymbol{B}$$

大家看，虽然矩阵乘法没有交换律，但是 $\boldsymbol{AB}$ 的幂运算转化成了 $\boldsymbol{BA}$ 的幂运算，也达到了类似于矩阵乘法交换律的效果。

以例 9.3.2 为例，$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的左边是列向量，右边是行向量，相乘后是一个 n 阶方阵，求其幂时不易看出规律，但是利用矩阵的结合律，将矩阵的幂转化为行向量与列向量的乘积 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，而行向量与列向量相乘的结果为一个数，这样就大大简化了矩阵的幂运算。

此技巧在本课程中常常用到，如证明逆矩阵的唯一性等。

例 9.3.3（难度系数 0.6，跨知识点 23）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解析：将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块成为分块对角阵，再用分块矩阵运算式$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{pmatrix}$。

解：将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块成为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix}$。

因为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=3\mathbf{E}+\boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$。故

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^n&=(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D})^n=(3\boldsymbol{E})^n+n(3\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{D}=3^n\boldsymbol{E}+n\cdot 3^{n-1}\boldsymbol{D}\\&=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}+n3^{n-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

又由于

$$\boldsymbol{C}^n=\begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix}^n=\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\right]^n=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]^{n-1}\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}=6^{n-1}\begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}&0&0\\0&3^n&0&0\\0&0&3\cdot 6^{n-1}&9\cdot 6^{n-1}\\0&0&6^{n-1}&3\cdot 6^{n-1}\end{pmatrix}。$$

知识点 10　转置矩阵及运算律

更多资源请扫二维码:

10.1　概念、运算律

1．概念

定义 10.1.1　矩阵的转置　把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行换成同序数的列后得到一个新矩阵，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

2．运算律

运算律 10.1.1　矩阵转置的运算律

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

（3）$(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

（4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

10.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 4
- **综述**：矩阵的转置与方阵的逆、方阵的行列式运算一样，是矩阵的“一元”运算。行列式转置的性质说明行列式的“行”与“列”的地位是相等的，即行所具有的性质列也有，此结论对于矩阵也是一样的。单纯矩阵的转置及运算律非常简单，但是将它与矩阵其他运算相结合的题型会变得很精彩！

10.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 9.3.2

例 10.3.1（难度系数 0.4）　设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{AB}=$________。

解析：本题考查矩阵乘法的结合律、乘法关于加法的分配律和转置运算。注意用到招数 9.3.2 即妙招“乾坤大挪移”，实际上当矩阵的乘法与矩阵的转置放在一起时，常常使用此招。

因为 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}\text{。}\end{aligned}$$

解：$\boldsymbol{E}$

例 10.3.2（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，若 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$。

解析：技巧同例 10.3.1，其不同之处在于需要主动创造“乾坤大挪移”的机会，即将 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 和自身再乘一次。

解：$(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$，

又

$$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

由矩阵相等的定义可得$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$。

例 10.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 12、14） 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶方阵且满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，求行列式$\left|\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\right|$。

解析：由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$知$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，因此$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$。代入所求行列式后再利用性质$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$。

解：因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，即$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，由于

$$\left|\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\right|=\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|,$$

且$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left|(-1)\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\right)\right|=(-1)^{3}\left|\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right|=-\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|$，所以

$$\left|\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\right|=\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=0。$$

知识点 11　伴随矩阵及其性质

更多资源请扫二维码:

11.1　概念、性质

1．概念

定义 11.1.1　方阵 A 的伴随矩阵　行列式$|\boldsymbol{A}|$的各个元素的代数余子式A_{ij}构成的如下方阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，简称伴随阵。

2．性质

性质 11.1.1　伴随矩阵的性质

设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，则

（1）$A^*A = AA^* = |A|E$

（2）$|A^*| = |A|^{n-1}$

11.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 12
- **综述**：伴随矩阵一般用来求矩阵的逆，而阶数稍高的矩阵的逆，用伴随式来求就很不方便，常使用初等行变换法来求解（参见知识点 12）。伴随矩阵与矩阵的其他运算相结合可生成一些新颖的题型，主要用到伴随矩阵的性质 11.1.1（1）。

11.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 15.3.4，例 18.3.5

例 11.3.1（难度系数 0.4） 设 A 为 n 阶可逆方阵，证明 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$。

解析：待证式可作为公式。把 $AA^* = A^*A = |A|E$ 中的 A 换成 A^*，则

$$A^*(A^*)^* = (A^*)^*A^* = |A^*|E \text{。}$$

因为 A 可逆，故 A^* 也可逆，解出 $(A^*)^*$ 即可。

证明：据 $AA^* = A^*A = |A|E$，等式两边作行列式运算得 $|A^*||A| = |A|^n$，又因为 A 可逆，即 $|A| \neq 0$，故 $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$，所以 A^* 也可逆。由 $\frac{A}{|A|}A^* = A^*\frac{A}{|A|} = E$，可得 $\left(A^*\right)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$。

将等式 $AA^* = A^*A = |A|E$ 中的 A 替换成 A^*，则得 $A^*(A^*)^* = (A^*)^*A^* = |A^*|E$。因此

$$(A^*)^* = (A^*)^{-1}|A^*| = \frac{1}{|A|}A|A|^{n-1} = |A|^{n-2}A \text{。}$$

例 11.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 15） 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，$A^*X + 4A^{-1} = A + X$，求矩阵 X。

解析：对矩阵方程先左乘 A，利用公式 $AA^* = |A|E$ 可化掉 A^*，求出 X 的表达式后再代入数值计算，这样做比较方便。

解：根据已知可得 $|A| = 2$。对 $A^*X + 4A^{-1} = A + X$ 左乘 A 得 $|A|X + 4E = A^2 + AX$，整理得

$$(A - 2E)X = -(A - 2E)(A + 2E) \text{。}$$

因为

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1&1&0\\1&-2&-1\\2&2&-4\end{vmatrix}=-8\neq 0\text{，}$$

所以 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，因此得

$$\boldsymbol{X}=-(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-3&-1&0\\-1&-2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}\text{。}$$

例 11.3.3（难度系数 0.6）　$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，又 k 为非零常数，则必有 $\left(k\boldsymbol{A}\right)^*=$（　）。

（A）$k\boldsymbol{A}^*$　　（B）$k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　　（C）$k^n\boldsymbol{A}^*$　　（D）$k^{-1}\boldsymbol{A}^*$

解析：特别注意代数余子式是行列式，因此 $k\boldsymbol{A}$ 元素的代数余子式是 $\boldsymbol{A}$ 对应元素的代数余子式乘 k^{n-1} 的 $n-1$ 阶行列式，因此进一步得出 $k\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $(k\boldsymbol{A})^*$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的关系。

设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，则 $k\boldsymbol{A}=\left(ka_{ij}\right)_{n\times n}=\boldsymbol{B}$。易见 $|\boldsymbol{B}|$ 中 ka_{ij} 的代数余子式 $B_{ij}=k^{n-1}A_{ij}$，所以

$$\left(k\boldsymbol{A}\right)^*=\boldsymbol{B}^*=\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{n1}\\\vdots&&\vdots\\B_{1n}&\cdots&B_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^{n-1}A_{11}&\cdots&k^{n-1}A_{n1}\\\vdots&&\vdots\\k^{n-1}A_{1n}&\cdots&k^{n-1}A_{nn}\end{pmatrix}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*\text{。}$$

（B）正确

解：（B）

例 11.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 22）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n & R(\boldsymbol{A})=n\\1 & R(\boldsymbol{A})=n-1\\0 & R(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$$

解析：此结论可作为定理使用。注意到 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵中元素 A_{ij} 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中 a_{ij} 的代数余子式，对应的余子式 M_{ij} 其实就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $n-1$ 阶子式，因此可以用矩阵的秩的原始概念进行判断，概念清楚后，证明就有了思路。注意使用矩阵秩的性质。

证明：（1）当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，因此 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$。

（2）当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n$（证明参见例 22.3.2），即 $R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$；又由 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，可知 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 $n-1$ 阶非零子式，那么 $R(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$。

综上所述可得 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$。

（3）当 $R(\boldsymbol{A})<n-1$ 时，则 $\boldsymbol{A}$ 中的所有 $n-1$ 阶子式均为零，因此 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式均为零，则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$。

知识点 12 逆矩阵及运算律

更多资源请扫二维码:

12.1 概念、定理及运算律

1. 概念

定义 12.1.1 线性变换的逆变换 给定一个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{12.1}$$

若记

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}=(a_{ij})$$

则可以用 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 表示上述线性变换，若存在矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 表示一个从 $\boldsymbol{y}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的线性变换，称为线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的逆变换。

定义 12.1.2 逆矩阵 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，简称逆阵。

2. 定理

定理 12.1.1 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则$|\boldsymbol{A}|\neq 0$。当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵，否则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

定理 12.1.2 若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*。$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

推论 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

定理 12.1.3 逆矩阵的唯一性 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，那么 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的。

3．运算律

运算律 12.1.1　逆矩阵的运算律

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $\lambda\neq0$，则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（3）若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 亦可逆，且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 亦可逆，且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$。

12.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 11，知识点 13
- **综述**：矩阵的逆是矩阵比较难的一元运算。注意矩阵有“乘法”但是没有“除法”，而矩阵的逆并不是矩阵的“倒数”。矩阵可逆需要两个条件：一是矩阵必须为方阵，二是矩阵对应的行列式非零，或者说矩阵为非奇异的、满秩的、非退化的，每一种说法都是针对可逆矩阵在某一方面的特性而言的。本知识点重点考查逆矩阵的两种求法（即伴随矩阵法与初等变换法）及其运算律，针对抽象矩阵的题目相对会难一些。

12.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 10.3.3，例 15.3.2，例 18.3.5，例 44.3.4

例 12.3.1（难度系数 0.2，跨知识点 18）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解析：基础题。求矩阵的逆主要有两种方法：第一，伴随矩阵法（参见定理 12.1.2），第二，初等变换法（其原理参见知识点 18）。

解一（伴随矩阵法）：根据已知易求得$|\boldsymbol{A}|=2$，且

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=2;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3.$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$。

解二（初等变换法）：$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}2&1&0&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_3\\r_1-2r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}0&-1&-2&1&0&-2\\0&1&0&0&1&-1\\1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\overset{\substack{r_1+r_2\\r_3-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&-2&1&1&-3\\0&1&0&0&1&-1\\1&0&1&0&-1&2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\r_3-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&0&1&-1\\1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$。

注：用伴随矩阵求矩阵的逆时，要特别注意其元素的下标。

例 12.3.2（难度系数 0.2）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$______。

解析：由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}。$$

解：$\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

招数 12.3.1　趣招：矩阵计算的“懒人”原则

在矩阵的计算中有一个有趣的现象，就是有的题目按照常规方法能做出来，但是计算却甚为麻烦。比如例 12.3.2 求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，常规的方法是先求 $\boldsymbol{A}^*$，然后再求它的逆，这两步计算量都很大。针对选择题要想想有没有什么“偷懒”的办法。此题若能从其概念入

手，则可以简化运算：若 A 可逆，根据 $AA^*=A^*A=|A|E$ 可得 $\left(\frac{1}{|A|}A\right)A^*=A^*\left(\frac{1}{|A|}A\right)=E$，因此得 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$，从而大大简化了运算。这就是所谓的“懒人”原则。

例 12.3.3（难度系数 0.6） 已知 A、B 为同阶可逆方阵，A^*、B^* 分别为其伴随矩阵，证明：

（1）B^*A^* 为 AB 的伴随矩阵；

（2）$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$。

解析：关于伴随矩阵的问题，一定要联想到公式 $AA^*=A^*A=|A|E$，对其变形或替换，可以得出许多结论，关键是要清楚概念。

证明：（1）根据 $(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}(AB)^*$，可得 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}$，同理可得 $B^*=|B|B^{-1}$，$A^*=|A|A^{-1}$，即

$$B^*A^*=|B|B^{-1}|A|A^{-1}=|B||A|B^{-1}A^{-1}=|AB|(AB)^{-1}=(AB)^*。$$

所以 B^*A^* 为 AB 的伴随矩阵。

（2）因为 A 可逆，且 $AA^*=A^*A=|A|E$，所以 $\left(A\frac{1}{|A|}\right)A^*=A^*\left(\frac{1}{|A|}A\right)=E$，即 A^* 可逆，且

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A \tag{12.2}$$

又因为 $A^{-1}(A^{-1})^*=|A^{-1}|E$，式（12.2）两端左乘 A，得

$$(A^{-1})^*=A|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}A \tag{12.3}$$

联合式（12.2）与式（12.3）可得 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$。

例 12.3.4（难度系数 0.6） 设 A、B、$A+B$ 均为 n 阶可逆矩阵，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，并求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$。

解析：此题有两种证法。证法一：为求某一抽象矩阵的逆，可设法将该矩阵化为若干可逆矩阵的乘积，根据可逆矩阵的乘积仍可逆可证明结论。证法二：可以尝试用“求矩阵方程”的方法，先假设其可逆，设出逆矩阵以后，将它作为未知矩阵，设法求出其表达式，能求出则说明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆。这种思路是数学中常用的。

证一：因为 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}(B+A)B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，

又 A^{-1}、$A+B$、B^{-1} 均为可逆矩阵，所以 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，对上式两边求逆即得 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=B\left(A+B\right)^{-1}A$。

证二：设存在矩阵 X 使得 $(A^{-1}+B^{-1})X=E$，对其左乘 A，得 $(E+AB^{-1})X=A$，即

$(B+A)B^{-1}X=A$，因为 $A+B$ 是可逆矩阵，所以 $X=B(A+B)^{-1}A$，即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，其逆矩阵为 $B(A+B)^{-1}A$。

招数 12.3.2　绝招：证明矩阵等式时的“从无到有”技巧

基于等式 $E=AA^{-1}=A^{-1}A$，可根据题目需要“从无到有”地“变”出许多矩阵。例 12.3.4 的“证一”很灵活地用到了此技巧。具体是选择矩阵左边还是选择右边进行变化，是用 $E=AA^{-1}$ 还是用 $E=A^{-1}A$，要根据题目的情况多去尝试。注意矩阵的乘法没有交换律，若选择时方向反了就可能证明不出或求不出结果。

知识点 13　矩阵可逆的判断

更多资源请扫二维码:

13.1　结论

结论 13.1.1　矩阵可逆的充分必要条件小结

（1）矩阵 A 可逆当且仅当 $|A|\neq 0$（参见定理 12.1.1，定理 12.1.2）；

（2）矩阵 A 可逆当且仅当 A 满秩；

（3）矩阵 A 可逆当且仅当存在矩阵 B，使得 $AB=E$（或 $BA=E$）；

（4）矩阵 A 可逆当且仅当 $A=B_1B_2\cdots B_s$，其中 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 可逆。

13.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 12
- **综述**：矩阵可逆的判断方法主要就是结论 13.1.1 中的四种。大家可以根据题目情况去选择，其中结论 13.1.1（3）中的方法比较常见，也比较灵活，结论 13.1.1（4）中的方法比较少见，难度较大。

13.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 15.3.2

例 13.3.1（难度系数 0.4）　设 A 是 n 阶矩阵，A 满足下列条件中的哪一条时，$E-A$ 是可逆矩阵？（　）

（A）存在自然数 n，$A^n=O$　　　　（B）A 是可逆矩阵

（C）存在自然数 n，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{E}$　　　　（D）$\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素全为零

解析：若存在某自然数 n，使得 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1})=\boldsymbol{E}$，因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，故（A）正确。（B）、（C）错误，反例均为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$。（D）错误，反例为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$。

解：（A）

例 13.3.2（难度系数 0.4，跨知识点 33）　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 均为 n 维列向量，证明：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1)$$

不可逆。

解析：只需证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关即可。

证明：因为 $\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1=-(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)-\cdots-(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n)$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2),(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\cdots,(\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1)$ 线性相关，其秩小于 n。又据矩阵的秩等于其列秩，可得 $R(\boldsymbol{A})<n$，即 $\boldsymbol{A}$ 不可逆。

例 13.3.3（难度系数 0.6）　已知 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且求出 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的表达式。

解析：根据矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的表达式，要证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆，可设法将 $\boldsymbol{B}$ 化成若干个可逆矩阵的乘积。在此基础上再求出 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的表达式。

证明：由已知条件 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$ 可得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}) \tag{13.1}$$

下面证明 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均可逆。

由 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并由 $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)=\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2$。

由 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，因此得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$。

由 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}^3+8\boldsymbol{E}=10\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})=10\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})$。

综上所述可知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均可逆，根据（13.1）可知 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}&=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\\&=\frac{1}{20}(\boldsymbol{A}^6-\boldsymbol{A}^5+3\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3+4\boldsymbol{A}^2)=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\ （利用\ \boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}）\end{aligned}$$

招数 13.3.1　怪招：用矩阵乘法判断矩阵可逆的“声东击西”法

在结论 13.1.1 总结的判断矩阵可逆的四种方法中，最引人入胜的就是第四种方法，即通过矩阵的乘法，将矩阵化成若干个矩阵的乘积，只要判断乘积式中每一个因子均为

可逆矩阵，即可断言原矩阵可逆！这是一种“声东击西”的方法，用此方法可以灵活地转换需要判断的矩阵，如例 12.3.4 及例 13.3.3。

例 13.3.4（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵，且 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中 a_{ij} 的代数余子式，证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $|\boldsymbol{A}|$。

解析： 欲证 $\boldsymbol{A}$ 可逆，只需证 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。因为已知条件涉及代数余子式，自然想到行列式按行（列）展开式。根据 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$ 可得出 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的关系，然后两边取行列式，可求 $|\boldsymbol{A}|$。

证明： 据 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，不妨设 $a_{11}\neq 0$。将行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一行展开，得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}{}^2+a_{12}{}^2+a_{13}{}^2\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

因为 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$，所以

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

两边取行列式，得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2$，所以 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|$，而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $|\boldsymbol{A}|=1$。

知识点 14　方阵的行列式及特殊类型的矩阵的运算

更多资源请扫二维码:

14.1　概念、运算律

1. 概念

定义 14.1.1　方阵的行列式　由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$。

定义 14.1.2　对称阵、反对称阵　若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为对称阵；若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为反对称阵。

2. 运算律

运算律 14.1.1　方阵的行列式的运算律

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则

（1）$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$

（2）$|\lambda A|=\lambda^n|A|$

（3）$|AB|=|A||B|$

14.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**2
- **最关联知识点：**知识点 36，知识点 52
- **综述：**方阵的行列式运算实际上在第 1 篇中已经详细叙述，本知识点仅涉及关于它的运算律 14.1.1。该运算律非常实用，尤其是运算律 14.1.1（3），可以与矩阵其他运算结合，得到许多出人意料的漂亮结论！本知识点的“特殊类型的矩阵”指的是对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵、对角矩阵、行（列）矩阵等。利用它们在各类运算中的特殊性，可得出一些有趣的结果，并可简化计算。因为行（列）矩阵运算的例子在其他知识点中已经涉及不少，所以此知识点不举与之相关的例子。

14.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 10.3.3

例 14.3.1（难度系数 0.2） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则下列等式中错误的是（ ）。

（A）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$ （B）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}|$

（C）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ （D）$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*$

解析：排除法。（A）根据 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$，正确；（B）、（C）显然正确。因此选（D）。

对（D）举反例：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^*=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\begin{pmatrix}10&0&0\\0&6&0\\0&0&15\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*$，（D）错误。

解：（D）。

注：由于矩阵的运算与数的四则运算容易“串味”，即大家有时会习惯性地将数的四则运算的运算律用于矩阵运算中，而忽略了矩阵运算与数的四则运算的不同之处。做此类题如例 14.3.1，通常用“排除法”，注意对于不熟悉的运算千万不要轻易下结论。

例 14.3.2（难度系数 0.8） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$。证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$。

解析： 本题考查行列式的性质及矩阵的乘法运算，注意运用公式 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 及证明矩阵等式时的“从无到有”的技巧（参见招数 12.3.2 中的“绝招”）。

证明： 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，两边取行列式可得 $|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{E}|=1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$；同理可得 $|\boldsymbol{B}|=\pm1$。又因为 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，即 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，所以综合上述得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-1$。

下面有等式

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{AB}^2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}\text{。}$$

上式两边取行列式可得：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|$，即

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\left(1-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\right)=0\text{。}$$

又由 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-1$，代入即得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$。

例 14.3.3（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，即满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$。

解析： 由于 $\boldsymbol{A}$ 是抽象矩阵，所以只能根据运算律来求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$。此题设法利用已知条件得到含 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 的一个“方程式”，技巧类似例 14.3.2. 注意：求抽象矩阵的行列式常常用到关于矩阵乘法的行列式的运算律 14.1.1（1）、（3）。

解： 因为 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，所以 $|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{E}|=1$，又 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$。另一方面，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，而 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\left|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，因此可得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$。

例 14.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 48、49）　设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|>0$，$\boldsymbol{S}$ 是实反对称矩阵。若 $\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{SA}$，则下列结论必成立的是（　　）。

（A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|>0$　（B）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|<0$　（C）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|=0$　（D）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|$ 的值不能确定

解析： 因为 $|\boldsymbol{A}|>0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆。因为 $\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{SA}$，所以 $\boldsymbol{SA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$。再根据 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵及 $\boldsymbol{S}$ 是实反对称矩阵，可得

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=-\boldsymbol{SA}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}\text{，}$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$ 为实反对称矩阵。设 λ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的任一特征值，ξ 为对应 λ 的特征向量，再设 $\overline{\xi}$ 与 $\overline{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}}$ 分别为 ξ 的共轭向量及 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的共轭矩阵。因此

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi&=\left(\overline{\lambda}\overline{\xi}\right)^{\mathrm{T}}\xi=\left(\overline{\lambda\xi}\right)^{\mathrm{T}}\xi=\left(\overline{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}\xi}\right)^{\mathrm{T}}\xi=\left(\overline{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}}\overline{\xi}\right)^{\mathrm{T}}\xi\\&=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}\overline{\xi}\right)^{\mathrm{T}}\xi=\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}\right)^{\mathrm{T}}\xi=-\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}\xi\right)\\&=-\lambda\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi,\end{aligned}$$

即 $\left(\overline{\lambda}+\lambda\right)\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi=0$，而 $\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi>0$，所以 $\overline{\lambda}+\lambda=0$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的特征值只能为 0 或数对共轭纯虚数，故 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的特征值只能为 1 或数对共轭虚数。根据特征值的性质可得

$\left|E+A^{-1}S\right|>0$，从而 $\left|A+S\right|=\left|A(E+A^{-1}S)\right|=\left|A\right|\left|E+A^{-1}S\right|>0$，故选（A）。

解：（A）。

例 14.3.5（难度系数 0.2，跨知识点 36）　设 A、B、$A+B$ 均为 n 阶正交矩阵，试证：$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$。

解析：考查正交矩阵的概念式 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E$，即 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$。

证明：因为 A、B、$A+B$ 均为正交矩阵，所以 $(A+B)^{\mathrm{T}}=(A+B)^{-1}$，$A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$，$B^{\mathrm{T}}=B^{-1}$，因此可得 $(A+B)^{-1}=(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}=A^{-1}+B^{-1}$。

知识点 15　矩阵方程的求解

更多资源请扫二维码:

15.1　定理

定理 15.1.1　矩阵方程解的判定定理

（1）矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,B)$。

（2）矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times l}=O$ 只有零解的充分必要条件是 $R(A)=n$。

15.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 8，知识点 46
- **综述**：求解矩阵方程是一类重要的题型，它和求解数的方程有些相似，但也有很多不同之处。矩阵方程的求解须将矩阵当作一个整体来对待，且充分考虑矩阵各类运算的特殊性，尤其是矩阵的乘法没有交换律与消去律。矩阵方程将在知识点 46 中再次出现，届时它与线性方程组联系起来，使得证明题变得十分灵动。

15.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 11.3.2，例 16.3.1，例 27.3.1，例 44.3.4

例 15.3.1（难度系数 0.2，跨知识点 18）　已知 $X\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $X=$____。

解析：此题可以直接求。对于形式为 $XA=B$ 的矩阵方程，可先求 A 的逆矩阵，再

作矩阵乘法，得 $X = BA^{-1}$。这里介绍通过初等变换求解矩阵方程 $XA = B$ 的方法，即

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix}。$$

令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，则原矩阵方程变为 $XA = B$。

因为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{\substack{c_3-c_2 \\ c_2-c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{c_1-c_3 \\ c_2+c_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，所以 $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$。

解： $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$。

招数 15.3.1　妙招：用分块矩阵作初等变换解矩阵方程。

（1）对于矩阵方程 $AX = B$，可作分块矩阵 $(A \mid B)$，对其作初等行变换：

$$(A \mid B) \overset{r}{\sim} (E \mid A^{-1}B)。$$

E 右边的部分就是 $X = A^{-1}B$。

（2）对于矩阵方程 $XA = B$，可作分块矩阵 $\left(\frac{A}{B}\right)$，对其作初等列变换：

$$\left(\frac{A}{B}\right) \overset{c}{\sim} \left(\frac{E}{BA^{-1}}\right)。$$

E 下边的部分就是 $X = BA^{-1}$。

此方法比直接计算简便许多，可起到“一箭双雕”的效果。其原理就是利用分块矩阵的运算及初等变换与初等矩阵的关系（参见知识点 17）。

例 15.3.2（难度系数 0.4，跨知识点 12、13）　设矩阵 A、B 满足 $2A^{-1}B = B - 4E$，

（1）证明：矩阵 $A - 2E$ 可逆；

（2）若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 A。

解析：（1）依题意得 $AB - 4A - 2B = O$，再想办法将此式分解出因子 $A - 2E$，最后由定理 12.1.2 的推论即可证明；（2）常规做法。

（1）**证明：** 因为 $2A^{-1}B = B - 4E$，所以 $2B = AB - 4A$，即 $AB - 4A - 2B = O$。整理得

$$(A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E。$$

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆。

（2）**解：**由上证结论 $2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}$，可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{B}$ 。所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}\\&=\begin{pmatrix}2&-4&0\\2&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}2&-4&0\\2&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

例 15.3.3（难度系数 0.6） 已知 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$。

解析：此题给出两种解法。第一种是按照常规思路，需要求两个逆矩阵；第二种是将已知式充分作变换，只需要求一个逆矩阵即可。

解一：由 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$ 。

先求矩阵 $\boldsymbol{A}$，根据已知易得 $\left|\boldsymbol{A}^*\right|=|\boldsymbol{A}|^{4-1}=8$，因此 $|\boldsymbol{A}|=2$ 。又因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，所以

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&\frac{3}{8}&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}。$$

再求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$，易得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix};$$

最后可得

$$B=3(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}。$$

解二：由$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}=8$，可得$|A|=2$。又因为$(A-E)BA^{-1}=3E$，所以$(A-E)B=3A$，左乘$A^*$得

$$A^*(A-E)B=3A^*A，$$

即$\left(2E-A^*\right)B=6E$，故$B=6\left(2E-A^*\right)^{-1}$。

由$2E-A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}$，得$\left(2E-A^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$，所以

$$B=6\left(2E-A^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}。$$

例 15.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 11）　已知$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$及$A^*B\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}B+12E$，求矩阵$B$。

解析：考查几个结论：$(kA)^*=k^{n-1}A^*$；$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$；$AA^*=A^*A=|A|E$。

解：根据已知易得$|A|=4$，用A左乘题目中的矩阵方程，得

$$AA^*B\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8AA^{-1}B+12A。$$

因为$AA^*=|A|E=4E$，且$\left(kA^*\right)^*=k^{n-1}\left(A^*\right)^*$，所以上式变为$4B\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(A^*\right)^*=8B+12A$。

又由$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A=|A|\cdot A=4A$，可知$4B\cdot\frac{1}{4}\cdot 4A=8B+12A$，整理得$B(A-2E)=3A$，因为

$$\begin{pmatrix} A-2E \\ 3A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

知识点 16　初等变换的概念及其应用

更多资源请扫二维码:

16.1　概念、结论

1．概念

定义 16.1.1　矩阵的初等行（列）变换　下面三种变换称为矩阵的初等行（列）变换：

（1）对调两行（列）(对调 i、j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；对调 i、j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$)；

（2）以数 $k\neq 0$ 乘某一行（列）中的所有元素（第 i 行乘 k 记作 $r_i\times k$，第 i 列乘 k 记作 $c_i\times k$)；

（3）把某一行（列）所有元素的 k 倍加到另一行（列）对应元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作 r_i+kr_j，第 j 列的 k 倍加到第 i 列上记作 c_i+kc_j)。

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为矩阵的初等变换。

定义 16.1.2　矩阵的三种特殊形式

（1）**行（列）阶梯形**　矩阵中可画出一条阶梯线，线的下（右）方元素全为零，每个阶梯只有一行（列），阶梯数即为非零行（列）的行（列）数，阶梯线的竖线后（下）面的第一个元素为非零元，这样的矩阵称为行（列）阶梯形矩阵。

（2）**行最简形**　若矩阵为行阶梯形矩阵，且其中非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在列的其他元素均为 0，这样的矩阵称为行最简形矩阵。

（3）**标准形**　左上角是一个单位矩阵，其余元素全为 0 的矩阵称为标准形矩阵。

2．结论

结论 16.1.1　用初等变换求矩阵的逆的方法

为了求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆，可将 $\boldsymbol{A}$ 和同阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 作成分块阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$，对其作初等行变换，当左边的子块 $\boldsymbol{A}$ 变成单位矩阵时，右边的子块则变成 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1})。$$

因此将变换后分块矩阵的右边子块取出即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

16.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 12，知识点 44，知识点 21，知识点 27
- **综述**：从此知识点开始，矩阵的“初等变换”隆重登场了！矩阵的初等变换贯穿于本课程的始终，只不过它在此之前是“隐身”的：部分矩阵乘法对应矩阵的初等变换（参见本篇综述），且行列式的三个性质（性质 2.11（2）、（3）、（6））也与之有着密切的联系。矩阵的初等变换使得变换前后的矩阵是等价的。本知识点主要考查初等变换的概念和应用。所谓“应用”，是指在本课程中涉及它的题型，如矩阵求逆、矩阵及向量组求秩、判断向量组的线性相关性及求向量组的最大无关组、判断向量组等价、方程组解的判定和求解、解矩阵方程等。这里都是跨知识点的题目，初学者可先跳过它们，等学完第 4 篇之后再返回这里。

16.3　经典例题精解巧析

例 16.3.1（难度系数 0.2，跨知识点 15）　求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}。$$

解析：此题类似例 15.3.1。当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有两种解法:（1）先求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，然后作乘法 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 以求 $\boldsymbol{X}$;（2）利用招数 15.3.1 中的初等变换法，即利用结论 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$。第二种做法更简便，本题采用此方法。

解：因为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&2&3&4&2&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\2&2&3&4&2&3\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&4&3&2&0&3\\0&1&1&0&3&3\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\r_3-4r_2\\r_3\times(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_3\\r_1+r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-8&-6\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$。

例 16.3.2（难度系数 0.2，跨知识点 30） 已知列向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

判断它的线性相关性。

解析：用向量组对应的矩阵的秩来判定其线性相关性。$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关当且仅当 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=5$； $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关当且仅当 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)<5$。

解：设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$，对其进行初等行变换将其化为行阶梯形：

$$\boldsymbol{A}\overset{r_2-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_5-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_4-\frac{1}{2}r_3\\r_5-\frac{1}{2}r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{r_5-r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}。$$

因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=5$，即此列向量组线性无关。

例 16.3.3（难度系数 0.6,跨知识点 27） 判定下列向量组是否等价。

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}\text{与}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}6\\-3\\8\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}6\\-3\\9\\3\end{pmatrix}\text{。}$$

解析：设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{C})$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 等价。此方法称为“三秩相等”。

解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4&2\\-1&-2&-1\\3&5&4\\1&4&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&6&6\\-1&-3&-3\\3&8&9\\1&5&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&4&2&2&6&6\\-1&-2&-1&-1&-3&-3\\3&5&4&3&8&9\\1&4&-1&1&5&3\end{pmatrix}$。对矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均进行初等行变换化为行阶梯形：

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&1&3&3\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{C})=2$。

由上面的结论可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 等价。

例 16.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 49）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\-1&1&-2&3\\3&-2&1&-1\\-2&3&-1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

解析：求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可用初等变换的方法，即对 $\boldsymbol{A}$ 进行成对的同类型的初等行变换和初等列变换：若对 $\boldsymbol{A}$ 交换 (i,j) 两行，则必须同时对 $\boldsymbol{A}$ 交换 (i,j) 两列；若把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素乘以非零数 k，则必须同时把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列元素乘以 $\dfrac{1}{k}$；若把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行元素的 k 倍加到第 i 行，则必须同时把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列元素的 $-k$ 倍加到第 j 列（注意列标！）上。最终可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$，而 $\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}$，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

解：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作相似变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\-1&1&-2&3\\3&-2&1&-1\\-2&3&-1&1\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&0&1&1\\3&-2&1&-1\\-2&3&-1&1\end{pmatrix}\overset{c_1-c_2}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&3&-2\\0&0&1&1\\5&-2&1&-1\\-5&3&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_4+r_3}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&3&-2\\0&0&1&1\\5&-2&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{c_3-c_4}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&5&-2\\0&0&0&1\\5&-2&2&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{r_3+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&5&-2\\0&0&0&1\\7&-3&7&-3\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{c_1-c_3}{\sim}\begin{pmatrix}-3&-1&5&-2\\0&0&0&1\\0&-3&7&-3\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-\frac{3}{7}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}-3&-1&5&-2\\0&0&0&1\\0&-3&7&-\frac{24}{7}\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{c_2+\frac{3}{7}c_3}{\sim}\begin{pmatrix}-3&\frac{8}{7}&5&-2\\0&0&0&1\\0&0&7&-\frac{24}{7}\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{r_4+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}-3&\frac{8}{7}&5&-2\\0&0&0&1\\0&0&7&-\frac{24}{7}\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{c_2-c_4}{\sim}\begin{pmatrix}-3&\frac{22}{7}&5&-2\\0&-1&0&1\\0&\frac{24}{7}&7&-\frac{24}{7}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3+\frac{3}{7}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}-3&\frac{22}{7}&5&-2\\0&-1&0&1\\0&3&7&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_2-\frac{3}{7}c_3}{\sim}\begin{pmatrix}-3&1&5&-2\\0&-1&0&1\\0&0&7&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&1&5&-2\\0&-1&0&1\\0&0&7&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 相似。 易得上三角阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为−3、−1、7，1。

根据相似矩阵有相同的特征值，可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为−3、−1、7，1。

知识点 17　初等方阵的概念

更多资源请扫二维码:

17.1　概念、结论

1．概念

定义 17.1.1　初等矩阵　由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

定义 17.1.2　三种初等变换与三种初等矩阵的对应

（1）对调两行或对调两列。把单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i，j 两行对调（或第 i，j 两列对调），可得初等矩阵，记为 $\boldsymbol{E}(i,j)$。

（2）以数 $k\neq0$ 乘某行或某列。以非零数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行（或列），可得初等矩阵，记为 $\boldsymbol{E}(i(k))$。

（3）以数 k 乘某行（列）加到另一行（列）上。以数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上（或以数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列加到第 j 列上），可得初等矩阵，记为 $\boldsymbol{E}(ij(k))$。

2．结论

结论 17.1.1　初等矩阵的逆

（1）$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$；（2）$\boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$；（3）$\boldsymbol{E}(ij(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(ij(-k))$。

17.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：2**
- **最关联知识点：**知识点 6，知识点 18
- **综述：**初等方阵是连接矩阵初等变换与乘法运算的纽带。初等变换有三类，对应的初等方阵也有三类，一个初等矩阵对应一次初等变换，总结成口诀就是“左行右列”，即一个初等方阵左乘矩阵，对应此矩阵进行一次初等行变换；一个初等方阵右乘矩阵，对应此矩阵进行一次初等列变换。本知识点只需要掌握初等方阵的结构与运算特点即可。

17.3　经典例题精解巧析

例 17.3.1（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=$ ______。

解析：据初等矩阵与初等变换的关系易得 $\boldsymbol{PC}=\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}&=(\boldsymbol{PC})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PC})\\&=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

解：$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

招数 17.3.1　趣招：口诀“左行右列”在初等矩阵中的应用。

在本课程中，初等方阵与初等变换的关系可以用口诀“*左行右列*”来描述，即左乘初等矩阵等价于进行同类的初等行变换，右乘初等矩阵等价于进行同类的初等列变换。实际上，此口诀来自矩阵的乘法规则。

知识点 18　初等变换与初等方阵的关系

更多资源请扫二维码：

18.1　定理

定理 18.1.1　初等方阵与初等变换的关系　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵。对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

具体变化如下：

（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左（右）乘 $\boldsymbol{E}(ij)$，相当于 $\boldsymbol{A}$ 中 i、j 两行（列）互换；

（2）左（右）乘 $\boldsymbol{E}(i(k))$，相当于 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行（列）乘以数 k；

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{E}(ij(k))$，相当于 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 行的 k 倍加到第 i 行上；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{E}(ij(k))$，相当于 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列的 k 倍加到第 j 列上。

定理 18.1.2　方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$。

推论　方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\mathbf{E}$。

18.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 17
- **综述**：知识点 17 讲到，初等方阵是连接矩阵的初等变换与矩阵乘法的纽带，本知识点延续知识点 17 的内容，重点讲解如何通过初等变换与初等方阵的关系解题。此关系将矩阵的初等变换与矩阵的乘法运算合二为一，这使得通过矩阵的运算来解决矩阵的初等变换的问题成为可能；反之，也可以通过矩阵的初等变换求矩阵的运算，比如解决矩阵求逆的问题。

18.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 12.3.1，例 15.3.1，例 56.3.1

例 18.3.1（难度系数 0.2）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 经过有限次类型为 $r_i \leftrightarrow r_j$ 与 $r_i + kr_j$ 的初等行变换后得到的矩阵 $\boldsymbol{B}$，则有（　）。

（A）$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$　　　　（B）$|\boldsymbol{A}| \neq |\boldsymbol{B}|$

（C）若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，则一定有 $|\boldsymbol{B}| = 0$　　　　（D）若 $|\boldsymbol{A}| > 0$，则一定有 $|\boldsymbol{B}| > 0$

解析： 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，据矩阵的初等行变换对应左乘初等矩阵，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PA}$，两边取行列式为 $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{PA}| = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}| = 0$，故（C）正确。

（A）、（D）错误，因为据初等变换与初等方阵的关系，初等行变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 对应 $\boldsymbol{A}$ 左乘初等矩阵 $E(ij)$，它对应的行列式要改变符号。（B）也是错误的，因为仅作偶数次行变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 不改变行列式的符号，且行列式的值不变。

解：（C）。

例 18.3.2（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12}+a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22}+a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32}+a_{33} & a_{31} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（　）。

（A）$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$　　（B）$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$　　（C）$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　（D）$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$

解析： 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换可得 $\boldsymbol{B}$，据招数 17.3.1 中的口诀“左行右列”，经过观察，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等列变换 $c_2 + c_3$ 及 $c_1 \leftrightarrow c_3$ 变换而成的，这两次变换分别对应初等矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 与 $\boldsymbol{P}_1$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}$，故（D）正确。

注意（C）错误，错在变换的顺序不对。

解：（D）。

例 18.3.3（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，用初等行变换的方法求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 然后据此将 $\boldsymbol{A}$ 分解成初等矩阵的乘积。

解析： 根据 $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{A}^{-1})$ 可求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再根据初等变换和初等方阵的关系可分解 $\boldsymbol{A}$。

解： $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 + r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 + r_3 \\ r_1 - 2r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\overset{\substack{r_2\times\frac{1}{2}\\ r_1-r_2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\text{。因此 } \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\text{。}$$

根据初等变换与初等方阵的关系，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\text{。}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\text{。}$$

招数 18.3.1　妙招：矩阵的初等变换与矩阵乘法的互变。

因为初等变换与初等方阵有对应的关系，所以矩阵的变换与矩阵的运算可以互变。矩阵乘法与初等变换各有优劣，不能说哪一个更好，需要视具体情况选择使用。特别要注意不是所有矩阵乘法都对应矩阵的初等变换，可逆矩阵与矩阵相乘才对应矩阵的初等变换。

例 18.3.4（难度系数 0.4，2004 年考研数学一真题）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为（　）。

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解析：本题考查初等矩阵与初等变换的关系。对 $\boldsymbol{A}$ 作两次初等列变换，相当于右乘两个相应的初等矩阵，而 $\boldsymbol{Q}$ 即为这两个初等矩阵的乘积。

由题设，有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

于是 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$，因此得 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

解：（D）。

例 18.3.5（难度系数 0.4，跨知识点 11、12）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n（$n\geqslant 2$）阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则（　）。

（A）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$　　（B）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$

（C）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$　　（D）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$

解析：由题意得 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$。所以 $(\boldsymbol{CA})^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{B}^*$。又

$$\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{C},$$

因此得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{B}^*$，故（C）正确。

解：（C）。

知识点 19　等价矩阵的概念与判断

更多资源请扫二维码:

19.1　概念、性质及结论

1．概念

定义 19.1.1　矩阵等价　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

2．性质

性质 19.1.1　矩阵等价关系的性质

（1）自反性　$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

（2）对称性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；

（3）传递性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$。

3．结论

结论 19.1.1　矩阵等价的判断

（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等变换化为 $\boldsymbol{B}$。

（2）$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$。

19.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**4
- **最关联知识点：**知识点 16
- 综述：矩阵的等价是本课程中最重要的概念之一，它是“等价”思想在矩阵上的体现。等价有三个性质：自反性、对称性和传递性。实际上，矩阵等价的概念可以拓展到向量组等价及方程组等价，即凡是有此三个性质的二元关系都可以称为等价关系。矩阵等价与矩阵的初等变换相对应，它可通过结论 19.1.1 中的两个结论来判断。还有一个更简单的结论：两个同型矩阵等价当且仅当它们有相同的秩。这结论可根据矩阵化标准形及等价的传递性来证明。有一类题型中将矩阵等价、矩阵相似及矩阵合同三个概念的判断结合起来，这样便于在比较中掌握概念，鉴于它涉及第 6 篇的知识，初学者可以结合知识点 56 来学习。

19.3　经典例题精解巧析

例 19.3.1（难度系数 0.2，跨知识点 56）　下列矩阵中与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$ 等价但不相似的矩阵是（　）。

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&9&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

解析：等价的矩阵必等秩，其逆否命题为若两个矩阵秩不相等，则必不等价。依题易得 $R(\boldsymbol{A})=2$，据此可排除（A）、（C），而（B）、（D）中的矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 等价。由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，对称阵必可以通过相似变换化为对角阵，因此只需要求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即可判断矩阵相似。经计算得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0、5、9，因此（D）中矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 相似，排除（D）。综上可知（B）正确。

解：（B）。

例 19.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 55）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，考虑以下命题：

① 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；

② 若行列式 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵；

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 都只有零解，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵；

④ 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为相似矩阵，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数相同。

以上命题中正确的是（　）。

（A）①③　　（B）②④　　（C）②③　　（D）③④

解析：①由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价可知 $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等变换变为 $\boldsymbol{B}$，而初等变换包括初等行变

换与初等列变换，因此不能推导出 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组必等价，故①错误。

②若行列式 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满秩，因此 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵；若 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$，矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 不满秩，则两个矩阵的秩可能不同，因此不能保证两者等价，②错误。

③若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 都只有零解，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=n$，因为 $\boldsymbol{A}^r\sim\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^r\sim\boldsymbol{E}$，根据等价关系的传递性可知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价，③正确。

④若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为相似矩阵，因为矩阵相似必等价，所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数分别为 $n-R(\boldsymbol{A})$ 和 $n-R(\boldsymbol{B})$，二者相等，④正确。

解：（D）。

知识点 20　矩阵的子式与最高阶非零子式

更多资源请扫二维码:

20.1　概念

定义 20.1.1　k 阶子式　在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列（$k\leqslant m$，$k\leqslant n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式。

定义 20.1.2　矩阵的最高阶非零子式　若在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那么 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式。

20.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 21
- **综述**：矩阵的最高阶非零子式用于判断矩阵的秩。实际上常用判断矩阵秩的方法是通过矩阵的初等行变换化行阶梯形，其阶梯的个数即为矩阵的秩。矩阵的最高阶非零子式有着重要的理论意义，特别是它在线性方程组解的结构理论中有着重要的地位。大家还要注意两点：①矩阵的子式是行列式；②在第 1 篇知识点 2 中 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的余子式即为对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $n-1$ 阶子式。

20.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 33.3.1

例 20.3.1（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&a&3\\2&4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3×4 的非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，因此 $R(\boldsymbol{B})=$______。

解析：本题考查矩阵秩的性质。若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$。

由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 可得 $R(\boldsymbol{B})\geqslant1$。因为 $\boldsymbol{A}$ 中有一个二阶子式 $\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}\neq0$，所以 $R(\boldsymbol{A})\geqslant2$。又由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant3$，即 $R(\boldsymbol{B})\leqslant3-R(\boldsymbol{A})\leqslant1$。综上有 $R(\boldsymbol{B})=1$。

解：1。

知识点 21　矩阵的秩的概念与判断

更多资源请扫二维码:

21.1　概念、结论

1．概念

定义 21.1.1　矩阵的秩　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式的阶数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$。并规定零矩阵的秩等于 0。

2．结论

结论 21.1.1　矩阵的秩的判断

（1）利用定义判断比较烦琐，除特殊情况外，一般不用。

（2）用初等变换将矩阵化为阶梯形，阶梯形的阶梯数即为矩阵的秩。

21.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 20，知识点 22
- **综述**：矩阵的秩是矩阵在初等变换下的不变量。判断矩阵的秩主要有两种方法：

一是通过求矩阵的最高阶非零子式判断，其阶数即为矩阵的秩；二是通过矩阵初等变换化阶梯形判断，阶梯数即为矩阵的秩，其中第二种方法最常用。此知识点的题型比较单纯，除常规题型外，还有一些关于矩阵秩的简单结论的应用。

21.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 33.3.1

例 21.3.1（难度系数 0.4）　求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$的秩。

解析：求含参数方阵的秩，先令其行列式不为零，确定满秩时的未知参数的值，再讨论其他情况。这样做比较简便。

解：因为$|\boldsymbol{A}|=(a+n-1)(a-1)^{n-1}$，所以：

（1）当$a\neq 1-n$且$a\neq 1$时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即$R(\boldsymbol{A})=n$；

（2）当$a=1$时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，所以$R(\boldsymbol{A})=1$；

（3）当$a=1-n$时，$R(\boldsymbol{A})<n$，又余子式

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-1}=(a+n-2)(a-1)^{n-2}=(-1)^{n-1}n^{n-2}\neq 0,$$

因此$R(\boldsymbol{A})=n-1$。

综合上述可得$R(\boldsymbol{A})=\begin{cases} n, & a\neq 1-n,\ a\neq 1, \\ n-1, & a=1-n, \\ 1, & a=1。\end{cases}$

例 21.3.2（难度系数 0.4）　求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & a & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$的秩。

解析：通过矩阵初等行变换化阶梯形求秩。若仅仅是矩阵求秩，矩阵的初等行与列

变换可以同时使用。

解：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等变换。

$$\boldsymbol{A}\overset{c_2\leftrightarrow c_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{pmatrix}$$

故：

（1）当 $a\neq1$ 且 $b\neq2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=4$；（2）当 $a\neq1$ 且 $b=2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$；

（3）当 $a=1$ 且 $b=2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$；（4）当 $a=1$ 且 $b\neq2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$。

知识点 22　矩阵的秩的性质与定理

更多资源请扫二维码:

22.1　定理、性质

1．定理

定理 22.1.1　矩阵的等价与矩阵的秩　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$。

定理 22.1.2　矩阵相乘的秩　设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则 $R(\boldsymbol{C})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$。

2．性质

性质 22.1.1　矩阵的秩的性质

（1）$0\leqslant R(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min\{m,n\}$。

（2）$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$。

（3）若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A})$。（对应定理 22.1.1）

（4）$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$，特别地，当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}$ 为列向量时,有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant R(\boldsymbol{A})+1$。

（5）$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$。

（6）$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A})，R(\boldsymbol{B})\}$。（对应定理 22.1.2）

（7）若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$。

22.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**5
- **最关联知识点：**知识点 21
- **综述：**关于矩阵的秩的性质与定理很多，性质 22.1.1 很常用。它们可以分为两大类：第一类为性质 22.1.1（1）与（4），这是矩阵或分块矩阵秩的性质，第二类为其余的性质，它们都与矩阵运算相关。其中性质 22.1.1（5）、性质 22.1.1（6）要结合向量组来证明，性质 22.1.1（7）要结合线性方程组来证明，还要注意在运用时将它们与向量组和方程组的结合。

22.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 11.3.4

例 22.3.1（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 为两个矩阵，证明 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),\ R(\boldsymbol{B})\}$。

解析：此题可用三种证法：①同解方程组法；②矩阵分块法；③初等变换法。

证一：设方程组（I）$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 与方程组（II）$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$。显然（II）的解一定是（I）的解，故

$$S-R(\boldsymbol{B})\leqslant S-R(\boldsymbol{AB})\text{，即 }R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})\text{。}$$

又因为

$$R(\boldsymbol{AB})=R\left[(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\right]=R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A}),$$

所以 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$。

证二：设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)$，对矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 按列分块，即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\ \boldsymbol{C}=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_s)\text{。}$$

因此有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_s),$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，$R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})$。

同理把 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 按行分块，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\gamma}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\text{。}$$

因此有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量组能由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示，$R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})$，故

$$R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),\ R(\boldsymbol{B})\}。$$

证三：设 $R(\boldsymbol{A})=r$，$R(\boldsymbol{B})=s$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{Q}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{Q}_2$，使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}。$$

故

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{ABQ}_2=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1)(\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1})(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}(\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1})\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}。$$

令 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{ABQ}_2=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rs} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

故 $R(\boldsymbol{AB})=R\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rs} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\leqslant \min(r,s)=\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$。

例 22.3.2（难度系数 0.4）　设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$。

解析：矩阵按列分块后代入运算式，可转化为齐次线性方程组，利用齐次线性方程组解的结构来证明。

证明：将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按照列分块，即 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$。根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_s)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

故 $\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{0}(i=1,\cdots,s)$，即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。另据方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $n-R(\boldsymbol{A})$ 个向量，故 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=R(\boldsymbol{B})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$。即

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n。$$

例 22.3.3（难度系数 0.8）　试证明任何一个秩为 r 的矩阵都可表示成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

解析： 假如矩阵为标准形，则此结论显然成立，由此得到启发：将矩阵通过初等变换化为标准形，将标准形分解后再变换回来即可得到结论。

证明： 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=r$，则有 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{F}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}。$$

设 $\boldsymbol{E}_{kk}$ 为仅第 k 行第 k 列的元素为 1，其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵，显然有

$$\boldsymbol{F}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr}。$$

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{F}_{m\times n}\boldsymbol{Q}^{-1}=\sum\limits_{k=1}^{r}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{kk}\boldsymbol{Q}^{-1}=\sum\limits_{k=1}^{r}\boldsymbol{B}_k$，其中 $\boldsymbol{B}_k=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{kk}\boldsymbol{Q}^{-1}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}$、$\boldsymbol{Q}^{-1}$ 可逆知 $R(\boldsymbol{B}_k)=R(\boldsymbol{E}_{kk})=1$，$k=1,2,\cdots,r$。

招数 22.3.1　绝招：矩阵等价化简问题的原则。

因为矩阵在初等变换前后的两个矩阵等价且等价的矩阵保持秩不变，所以可以通过矩阵等价，将任意矩阵化简成行阶梯形、行最简形或标准形，在这些简单的形式下得到需要证明的结论后再变换回来，看看此结论对于变换之前的矩阵是否成立。这给了我们一个启发：如欲证明与某矩阵相关的结论，不妨先将此矩阵通过初等变换化为较简单的形式，看看能否得到结论，若能得到结论，则可考虑用“等价化简”的方法，即通过初等变换将矩阵与其简化的形式联系起来，找出其中的不变的性质，最终通过简化的形式解决问题。

例 22.3.4（难度系数 0.4，1999 年考研数学一真题）　设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$、$\boldsymbol{B}_{n\times m}$，则（　）。

（A）当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　（B）当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

（C）当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　（D）当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

解析： 当 $m>n$ 时，$R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min[R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})]\leqslant n<m$，又由于 $\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶矩阵，它不满秩，所以可得 $|\boldsymbol{AB}|=0$，故选（B）。

解：（B）。

例 22.3.5（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，且 $R\left(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right)=3$，若 $R\left(\boldsymbol{B}\right)=2$，则 $R\left(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}\right)=$（　）。

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）无法判断

解析： 此题主要考查矩阵乘法的秩的性质，求解时需要利用结论：非退化阵与矩阵相乘，不会改变此矩阵的秩。

因为 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$，且已知 $R\left(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right)=3$，即

$$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right)$$

为非退化矩阵。所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均为非退化矩阵，即 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=3$。

又因为 $(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$，且非退化矩阵与矩阵相乘不改变其秩，所以

$$R(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B})=R[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}]=R(\boldsymbol{B})=2。$$

因此选（B）。

解：（B）。

例 22.3.6（难度系数 0.8）　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$（幂等阵），证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$。

解析：证明有关矩阵秩的和常常会用到以下两个结论:

① $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$；② $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{E}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=n(k\neq 0)$。

证明：因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，由例 22.3.2 的结论，可得

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n \tag{22.1}$$

又因为 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}$，所以

$$n=R(\boldsymbol{E})=R[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}]\leqslant R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}) \tag{22.2}$$

综合式（22.1）及式（22.2）得

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n。$$

知识点 23 分块矩阵的概念与运算、特殊分块阵的运算

更多资源请扫二维码:

23.1　概念、运算规则

1．概念

定义 23.1.1　分块矩阵　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

定义 23.1.2　分块对角阵　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵,且在对角线上的子块都是方阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\text{（其中 }\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s\text{ 均为方阵），}$$

则称它为分块对角阵。

2．运算规则

规则 23.1.1　分块矩阵的加法　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，且采用相同的分块方法，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数、列数均相同，那么

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}。$$

规则 23.1.2　分块矩阵的数乘　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，$\lambda$为数，那么

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}。$$

规则 23.1.3　分块矩阵的乘法　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵，将它们分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{tj}$ 的行数，那么

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\quad(i=1,\cdots,s;\quad j=1,\cdots,r)$。

规则 23.1.4　分块矩阵的转置　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$。

规则 23.1.5　分块对角阵的逆　对于分块对角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix},$$

如果$|\boldsymbol{A}_i|\neq0$（$i=1,2,\cdots,s$），则$|\boldsymbol{A}|\neq0$，并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}。$$

规则 23.1.6　分块对角阵的行列式　对于分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

有$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$。

23.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**5
- **最关联知识点：**知识点 24，知识点 47
- **综述：**分块矩阵的运算并不是矩阵新的运算类型，而是对矩阵运算的一种“分层次”的处理技巧。矩阵分块在本课程中有着重要的地位，其解题技巧及应用将在知识点 24 中进行详细介绍，本知识点重点介绍分块矩阵的概念与运算，其中特别注意分块矩阵的乘法与分块对角阵的逆的运算。

23.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 9.3.3

例 23.3.1（难度系数 0.4）　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均为 n 维列向量，A 为 n 阶方阵，下面有 4 个式子：

① $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)$；② $A\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\alpha_1^T\\ A\alpha_2^T\\ \vdots\\ A\alpha_n^T\end{pmatrix}$；

③ $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A=(\alpha_1 A,\alpha_2 A,\cdots,\alpha_n A)$；④ $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T A\\ \alpha_2^T A\\ \vdots\\ \alpha_n^T A\end{pmatrix}$。

则以上式子中成立的是（　）。

（A）①和③　（B）①和④　（C）②和③　（D）②和④

解析：此题主要考查分块矩阵乘法运算的条件，但若想当然则容易犯错，原因在于:

没有弄清楚一个“没有分块”的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与分块矩阵相乘时该如何处理。注意这里必须将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 当做 1×1 的分块矩阵，这就是所谓的“不分块的分块矩阵”（具体解释参见结论 24.1.1（5））。显然②、③不符合分块阵乘积的条件，运算错误，而①、④正确，故选（B）。

解：（B）。

例 23.3.2（难度系数 0.2）　用分块的方法求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&3&2&0&0\\0&4&3&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解析：常规题型。$\boldsymbol{A}$ 可分解成分块对角阵，套公式即可。

解：$\boldsymbol{A}$ 可作如下分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&3&2&0&0\\0&4&3&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&\\&\boldsymbol{A}_2&\\&&\boldsymbol{A}_3\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=(2)$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}_3^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$。

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&&\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}&\\&&\boldsymbol{A}_3^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&3&-2&0&0\\0&-4&3&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}。$$

例 23.3.3（难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，试证明：

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}|。$$

解析：先构造与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 等价的矩阵，设法使等价的矩阵中含 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$，再作行列式运算。

证明：因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\end{pmatrix},\tag{23.1}$$

两边作行列式运算得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB} \end{vmatrix},$$

即

$$(-1)^n\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB} \end{vmatrix}=(-1)^n\left|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}\right|。$$

所以$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}\right|$。

招数 23.3.1　险招：分块矩阵的“初等变换”。

请大家看例 23.3.3 证明中的式（23.1）：若将“$\boldsymbol{E}$”换成“1”,“$\boldsymbol{O}$”换成“0”,“$\boldsymbol{A}$”换成“a”,“$\boldsymbol{B}$”换成“b”，则式（23.1）变成

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1-ab \end{pmatrix}。$$

注意到$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$均为初等矩阵，因此上面的矩阵乘法式又可以看成对矩阵$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$分别施行初等行变换：　r_1-ar_2，$r_1\leftrightarrow r_2$。这给大家一个启发：可以将分块矩阵当作“元素”来对待，对分块矩阵作“初等行变换”。它可作为矩阵的初等行变换在分块矩阵的推广。大家若不放心，可以用分块矩阵的运算法则验证一下。

例 23.3.4（难度系数 1.0，跨知识点 24）　设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$ 及分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$均为可逆矩阵，求$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1}$。

解析：此题难度很大。待定元素法求分块矩阵的逆的过程中，需要先证明某些子块可逆。本题判断分块矩阵可逆的技巧是基于以下的事实：

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可逆，则矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$可逆；反之，若$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$可逆，且 $\boldsymbol{A}$（或 $\boldsymbol{B}$）可逆，则 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{A}$）可逆。

（2）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可逆，则矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$可逆；反之，若$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$可逆，且 $\boldsymbol{A}$（或 $\boldsymbol{B}$）可逆，则 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{A}$）可逆。

以上两个矩阵可以用矩阵的秩来证明。

解：首先易见分块矩阵$\begin{pmatrix} -A^{-1}B & E \\ E & O \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} E & O \\ -D^{-1}C & E \end{pmatrix}$均可逆，又据$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$及$A$、$D$可逆，则下列矩阵也同样可逆：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A^{-1}B & E \\ E & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & A \\ D-CA^{-1}B & C \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -D^{-1}C & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ O & D \end{pmatrix}。$$

因此矩阵$D-CA^{-1}B$与$A-BD^{-1}C$均可逆。

设$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$，即

$$\begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}。$$

对比上面的矩阵等式两端可得$\begin{cases} AY+BW=O \\ CX+DZ=O \end{cases}$，再据$A$、$D$是可逆矩阵，得

$$\begin{cases} Y=-A^{-1}BW, \\ Z=-D^{-1}CX。 \end{cases} \tag{23.2}$$

又因为$\begin{cases} AX+BZ=E \\ CY+DW=E \end{cases}$，将式（23.2）代入，得

$$\begin{cases} W=\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}, \\ X=\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}。 \end{cases} \tag{23.3}$$

再将式（23.3）代入式（23.2），得

$$\begin{cases} Y=-A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}, \\ Z=-D^{-1}C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}。 \end{cases}$$

综合上述可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \left(A-BD^{-1}C\right)^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1} & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}。$$

例 23.3.5（难度系数 0.4，跨知识点 26，2005 年考研数学一真题）　设α_1、α_2、α_3均为3维列向量，记矩阵$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$B=\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3\right)$，如果$|A|=1$，那么$|B|=$__________。

解析：将B写成用A右乘另一方阵的形式，这里要涉及矩阵分块的技巧以及方阵相乘的行列式性质。注意此题直接计算是难以算出来的。

解：由题设，有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$，于是

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2。$$

例 23.3.6（难度系数 0.6） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数。记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&b\end{pmatrix}。$$

（1）计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$；

（2）证明：矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$。

解析：先利用分块矩阵的乘法规则化简 $\boldsymbol{PQ}$，再通过证明 $|\boldsymbol{Q}|\neq0$ 得到 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件。

（1）**解：** $\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha E}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}+b|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}$。

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，$-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|$，则有 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$。因此

$$\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha E}\\\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&-(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}-b)|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}。$$

（2）**证明：**因为 $|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|$，所以

$$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{Q}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha E}\\\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&-(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}-b)|\boldsymbol{A}|\end{vmatrix}=-(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}-b)|\boldsymbol{A}|^2,$$

则 $|\boldsymbol{Q}|=-(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}-b)|\boldsymbol{A}|$。因为 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，即 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，所以 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 存在的充分必要条件为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$。

小结：矩阵分块的作用如下。

（1）降低矩阵的阶数，可简化计算；

（2）可以利用分块矩阵的运算规则构建出一些技巧；

（3）利用矩阵按行（列）分块将矩阵与向量组联系起来，使得矩阵与向量组互为工具解决问题。实际上许多重要的定理和结论都是用这种方法推导出来的。

知识点 24　矩阵分块在解题中的技巧举例

更多资源请扫二维码:

24.1　结论

结论 24.1.1　矩阵分块的分类举例

（1）矩阵分成“四分块矩阵”：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{A}_{11}$、$\boldsymbol{A}_{22}$ 是方阵或 $\boldsymbol{A}_{11}$、$\boldsymbol{A}_{12}$、$\boldsymbol{A}_{21}$、$\boldsymbol{A}_{22}$ 全是方阵。这是最常用的分块。

（2）矩阵按照行（列）分块。

对一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，它可以按照列分块：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\text{，其中 }\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix},\ j=1,\cdots,n\text{；}$$

也可以按照行分块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\text{，其中 }\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ i=1,\cdots,m\text{。}$$

（3）矩阵分解成分块对角阵（特殊情形）：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\text{，其中 }\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s\text{ 是方阵。}$$

（4）矩阵分解成一行（一列）的分块矩阵。

例如

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)$$

或

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}。$$

（5）“加一层皮”的分块——矩阵加一行或一列，或加一行和一列。

例如

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix}，其中 \alpha,\beta 为列向量。$$

（6）“不分块”的分块——矩阵当成一整块。这种分块方法最容易被忽略。当一个普通矩阵与一个分块矩阵相乘时，若要普通矩阵整个乘入分块矩阵中，则它必须“被迫”当成1×1分块矩阵，如在讨论矩阵A的相似对角化问题时，有下式

$$A\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Ap_1 & Ap_2 & \cdots & Ap_n \end{pmatrix}。$$

这是一个典型的“不分块”的分块的实例。上式的左边A后面的矩阵是按列分块的，为了将矩阵A乘入分块矩阵中，矩阵$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$是$1\times n$分块阵，按照分块矩阵的乘法规则，必须将$A$当成$1\times1$的分块阵。一定要注意：不分块的矩阵是不能直接与分块矩阵相乘的！

（7）最细的分块——每个元素均当成一块。对于矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，它可以表示为$A=(A_{ij})_{m\times n}$，其中$A_{ij}=(a_{ij})$（注意：$A_{ij}$不是指行列式的代数余子式，$(a_{ij})$为单元素矩阵），就是将每个元素当成一个$1\times1$的子块。

例如

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{pmatrix}。$$

这里的$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$不能当作“不分块”的分块矩阵，若它不分块，则上式左边必不能相乘，道理和（6）一样。此时将它当作最“细”的分块矩阵，即每一个元素当成一个子块，那么它就可以相乘了。

24.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 23，知识点 47
- **综述**：矩阵分块在本课程中有着非常重要的地位，这是不少学生容易忽略的。矩阵的分块非常灵活，针对不同的情形有不同的分块方法。若矩阵缺少了“分块”这一

部分，本课程的知识将变得十分松散且呆板。最引人入胜的分块方法是将矩阵按照行或列分块，它可作为连接矩阵、向量组与线性方程组的纽带。这将在知识点 47 中详细介绍，本知识点主要讲解矩阵分块的一些有特色的技巧，其中矩阵按照行（列）分块，利用矩阵、向量组与方程组之间的关系来解题的技巧将在知识点 47 详述。

24.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 23.3.4，例 30.3.3，例 30.3.4

例 24.3.1（难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，证明：如果 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 也可逆。

解析：这里提供两种做法：（1）拼凑运算法，即“拼凑”出逆矩阵的形式，技巧性强，为了便于拼凑，可设出 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 的逆矩阵；（2）利用分块矩阵的乘法构造分块矩阵。详细解释见下面招数 24.3.1 中的“奇招”。

证一：根据 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆，可设其逆矩阵为 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}$，则

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}\text{。}$$

上式展开即得

$$\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}\text{。}$$

所以 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{ABC})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$，整理得 $\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{BCA})-\boldsymbol{BCA}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$，对其因式分解得

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})=\boldsymbol{E}\text{。}$$

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 是可逆矩阵。

证二：考虑分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\text{。}$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|\text{；}\tag{24.1}$$

再考虑

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|\text{。}\tag{24.2}$$

结合式（24.1）与式（24.2）可得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|\text{。}$$

即 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|$。所以若 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 也可逆。

注：此题还可以联系方程组来证明，参见习题 4.21。

招数 24.3.1　奇招："一维"变"二维"——通过构造分块矩阵来求解与矩阵乘法交换有关的证明题。

原本是看起来与分块矩阵无关而与矩阵乘法交换有关的证明题，一个绝好的经验就是构造出分块矩阵，通过分块矩阵的性质来证明它，这就是所谓的"一维变二维"的方法，这显然与常规思路相悖！常规思路是将"二维"的问题转化为"一维"的问题来解决。如例 24.3.1，由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 可逆，中间涉及矩阵乘法运算的交换问题，由于矩阵乘法运算无交换律，所以常规方法往往像"证一"那样需要巧妙地拼凑，再利用矩阵乘法的结合律来证明，"凑"起来很费劲，即使凑对了也会有一种"碰巧"的感觉；而"证二"中利用分块矩阵来做，就是将待证式作为分块矩阵的一部分，灵活地添加其他子块，最后通过矩阵的运算（常常是矩阵的乘法）来寻找规律，此法亦巧妙！关键是相对"拼凑运算法"来说更有规律可循，堪称"奇招"。

例 24.3.2（难度系数 1.0）　设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 是 n 阶方阵，它的顺序主子式全不为零。证明：存在非奇异下三角形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与非奇异上三角形矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$。

解析：可利用数学归纳法证明。具体解释见招数 24.3.2 中的"绝招"。

证明：对阶数 n 用数学归纳法。

（1）当 $n=1$ 时结论显然成立；

（2）设当 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 $n-1$ 时，结论成立。当 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 n 时，可将 $\boldsymbol{A}$ 分块成 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn}\end{pmatrix}$。其中

$$\boldsymbol{A}_{n-1}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n-1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1}\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{n-1,n}\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}\end{pmatrix}。$$

由归纳假设可得：对于 $n-1$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{n-1}$，有 $\boldsymbol{A}_{n-1}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1$，其中 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{C}_1$ 分别是 $n-1$ 阶非奇异下三角形与非奇异上三角形矩阵，$\left|\boldsymbol{B}_1\right|\neq 0$，$\left|\boldsymbol{C}_1\right|\neq 0$。

首先有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}，其中 b=a_{nn}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}。\tag{24.3}$$

根据 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全不为零，可知 $\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 满秩。又因为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}$ 满秩，所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}$ 满秩。同理 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 满秩，因此 $b\neq 0$，且

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}。\tag{24.4}$$

式（24.3）、（24.4）结合得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}。$$

最后得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\alpha \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}。 \end{aligned}$$

令　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{B}_1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$，且 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}_1|\neq 0$，$|\boldsymbol{C}|=b|\boldsymbol{C}_1|\neq 0$。

所以 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 分别是所求的非奇异的下三角形与上三角形矩阵。

招数 24.3.2　绝招：数学归纳法在矩阵证明中的应用。

数学归纳法作为一种常用解题方法，在本课程中主要用于两处：一是用于行列式的计算，二是用于抽象矩阵的证明，如例 24.3.2。

n 阶矩阵一定是和自然数有关的，这满足使用数学归纳法的基本条件。按理来说，大家应该容易想到用此方法，但有趣的是大家常常忽略此方法。其原因在于：如果要用它，往往需要用到矩阵的分块，而大家对矩阵的分块有天然的排斥心理。实际上，在大家对证明题目感到束手无策时，一定不要忘了使出最后的绝招——“数学归纳法”！

用数学归纳法证明抽象矩阵必须构造分块矩阵，其特点是：左上角是一个方阵，下边与右边各“加一层皮”，即分别加一行和一列。最后通过分块矩阵的乘法运算来找规律。

例 24.3.3（难度系数 1.0）　设 n 阶幂等阵 $\boldsymbol{A}$（即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$）的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$，证明存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}。$$

解析：从待证式很容易联想到任意矩阵均可通过初等变换化为标准形，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，而本题的目的是证明 $\boldsymbol{A}$ 可以通过相似变换化为标准形，一个思路是：基于上面的初等变换式，将之慢慢地“演变”成相似变换式。演变的关键是根据 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}$，然后讨论 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 的构造，为了便于它与 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 相乘，可将它设成分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} \end{pmatrix}$，因此可得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。最后分两步做：第一，证明 $\boldsymbol{C}_{11}$ 为单位阵；第二，设法对 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 继续作相似变换将 $\boldsymbol{C}_{12}$ 变为 $\boldsymbol{O}$。本题的技巧性相当强。

证明：因为矩阵必可通过初等变换化为标准形，所以存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}。$$

记 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}_{11}$ 为 r 阶方阵，则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}。\tag{24.5}$$

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知 $\left(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\right)^2=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$，再结合式（24.5）可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11}^2 & \boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

因此可得 $\boldsymbol{C}_{11}^2=\boldsymbol{C}_{11}$，$\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{C}_{12}=\boldsymbol{C}_{12}$。两式结合可得等式 $\boldsymbol{C}_{11}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\end{pmatrix}$。

根据已知 $R(\boldsymbol{A})=r$ 及式（24.5），可得

$$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\right)=R\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right]=R\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\end{pmatrix}\right]=r。$$

又因为 $\boldsymbol{C}_{11}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\end{pmatrix}$，所以 $r=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\end{pmatrix}\leqslant R\left(\boldsymbol{C}_{11}\right)$，而 r 阶方阵 $\boldsymbol{C}_{11}$ 的秩 $R\left(\boldsymbol{C}_{11}\right)\leqslant r$，故 $R(\boldsymbol{C}_{11})=r$，即 $\boldsymbol{C}_{11}$ 可逆。根据 $\boldsymbol{C}_{11}^2=\boldsymbol{C}_{11}$，等式两边左乘 $\boldsymbol{C}_{11}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{E}_r$，随之可得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}。$$

现在令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & -\boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{P}$ 可逆，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & -\boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & -\boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

证毕。

例 24.3.4（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，利用分块矩阵证明：

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}。$$

解析：此题有一定的技巧，考虑用分块矩阵乘法的行列式的性质。先将待证等式中的两个行列式分别对应矩阵，再看两个矩阵之间的关系。

证明：因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

两边同作行列式运算，得

$$\begin{vmatrix} E & -B \\ O & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & B \\ -A & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E+BA & O \\ -A & E \end{vmatrix}。$$

因为$\begin{vmatrix} E & -B \\ O & E \end{vmatrix}=1$，所以

$$\begin{vmatrix} E & B \\ -A & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E+BA & O \\ -A & E \end{vmatrix}。$$

例 24.3.5（难度系数 0.8）设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，求证：$R(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$。

解析：关于矩阵的秩的不等式的证明，有两种常规方法：第一，利用矩阵的乘法或加法运算，再根据矩阵乘法或加法的秩的性质来证明；第二，构造分块矩阵，不等式中的矩阵作为分块矩阵中的某一个子块。构造出分块矩阵后，利用矩阵的丰富、灵活的变换解决问题。这也是类似招数 24.3.1 中“一维”变“二维”的方法。本题用采用第二种方法，用时也要结合矩阵乘法的秩的性质。

证明：因为

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & AB+A+B \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

显然分块矩阵$\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}$都可逆，所以有

$$R\begin{pmatrix} A & AB+A+B \\ O & B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}。$$

而

$$R\begin{pmatrix} A & AB+A+B \\ O & B \end{pmatrix} \geqslant R(AB+A+B),$$

且

$$R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = R(A)+R(B),$$

故可得

$$R(AB+A+B) \leqslant R(A)+R(B)。$$

例 24.3.6（难度系数 0.6） 设 $\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}_s$ 是从 $\boldsymbol{C}$ 中取前 s 行得到的矩阵，求证：

$$R(C_s) \geqslant R(C)+s-m。$$

解析：先将矩阵进行分块，再根据矩阵加法的秩的性质证明。

证明：设 $\boldsymbol{C}$ 的后 $m-s$ 行构成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则

$$C = \begin{pmatrix} C_s \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_s \\ O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ B \end{pmatrix}。$$

根据结论

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}),$$

于是可得

$$R(\boldsymbol{C})\leqslant R\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_s\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}+R\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}。$$

显然 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_s\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{C}_s)$，$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant m-s$，因此 $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{C}_s)+m-s$，即 $R(\boldsymbol{C}_s)\geqslant R(\boldsymbol{C})+s-m$。

第 2 篇综合测试题

2.1（知识点 8，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，且有关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则必有（　　）。

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　（B）$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（C）当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$　　（D）当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

2.2（知识点 8、13，难度系数 0.4）　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则必有（　）。

（A）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　（B）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　（C）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　（D）$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

2.3（知识点 8，难度系数 0.4）　设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，求 $\boldsymbol{AB}$。

2.4（知识点 9、23，难度系数 0.2）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&0&0&0&0\\0&7&0&0&0\\0&0&2&-1&0\\0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{12}$。

2.5（知识点 9，难度系数 0.6）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，

（1）证明：$n\geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$；

（2）求 $\boldsymbol{A}^{100}$。

2.6（知识点 10，难度系数 0.4）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^n$。

2.7（知识点 10、14，难度系数 0.2 ）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，证明：当 n 为奇数时，$|\boldsymbol{A}|=0$。

2.8（知识点 11，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1&-1\\1&a&1&-1\\1&1&a&-1\\1&1&-1&a\end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$，则 a=_____。

2.9（知识点 11、14，难度系数 0.6，2004 年考研数学一真题）　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为单位矩阵，则 $|B|=$_______。

2.10（知识点 11，难度系数 0.6）　设 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$，求 X。

2.11（知识点 11、2，难度系数 0.6）　已知 $|A|=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&0&0&0\end{vmatrix}$，求 $|A|$ 的所有元素的代数余子式之和。

2.12（知识点 12，难度系数 0.6，2000 年考研数学二真题）　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix},$$

E 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，求 $(E+B)^{-1}$。

2.13（知识点 12，难度系数 0.2）　设 A 为 n 阶可逆矩阵，则下面各式恒正确的是（　　）。

（A）$|2A|=2|A^{\mathrm{T}}|$　　（B）$A^*B^*=(AB)^*$

（C）$[(A^{-1})^{-1}]^{\mathrm{T}}=[(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]^{-1}$　　（D）$[(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(A^{-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$

2.14（知识点 12，难度系数 0.6）　设 A、B 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$_______。

2.15（知识点 13，难度系数 0.4）　设 A、B 都是 n 阶方阵，$|B|\neq 0$，$A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=(B-E)^{\mathrm{T}}$，证明 A 可逆。

2.16（知识点 13，难度系数 0.6）已知 α、β 是相互正交的 n 维列向量，证明：$E+\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 可逆。

2.17（知识点 13，难度系数 0.2）　设 A、B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是（　　）。

（A）若 A、B 均可逆，则 $A+B$ 可逆　　（B）若 A、B 均可逆，则 A^*B^* 可逆

（C）若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆　　（D）若 $A+B$ 可逆，则 A、B 均可逆

2.18（知识点 13，难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为幂零矩阵（即存在正整数 n，使得 $\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵。

2.19（知识点 14，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，下面各式恒正确的是（　）。

（A）$\left|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|+\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|$　　（B）$\left|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|$

（C）$\left|(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|+\left|\boldsymbol{B}\right|$　　（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

2.20（知识点 14，难度系数 0.4，2006 年考研数学一真题）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$______。

2.21（知识点 14、36，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 关于矩阵乘法可交换，且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆，证明：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 是正交矩阵。

2.22（知识点 15，难度系数 0.2）　设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$。

2.23（知识点 15，难度系数 0.4）　设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$。

2.24（知识点 15，难度系数 0.6）　设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

且 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，求 $\boldsymbol{A}$。

2.25（知识点 15、11，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$。

2.26（知识点 17，难度系数 0.4）　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$。

2.27（知识点 18，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则（　）。

（A）$\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换可变为单位阵 $\boldsymbol{E}$

（B）由 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{BA}$，可得 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

（C）当 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})$ 经过有限次初等变换变为 $(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{B})$ 时，有 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$

（D）$\boldsymbol{A}$ 可以化成类型为 $\boldsymbol{E}(ij(k))$ 的初等矩阵的乘积

2.28（知识点 18，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$a$、$b$、$c$、$d$ 均非零，利用初等矩阵求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

2.29（知识点 19、55、60，难度系数 0.6，2001 年考研数学一真题）　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　）。

（A）合同且相似　（B）合同但不相似　（C）不合同但相似　（D）不合同且不相似

2.30（知识点 19、28、50，难度系数 0.4）　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有（　）。

（A）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

（B）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

（C）方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解

（D）方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中向量个数相同

2.31（知识点 20，难度系数 0.4）　求下列矩阵的秩和一个最高阶非零子式。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2.32（知识点 21，难度系数 0.2）　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶非零子式，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩（　）。

（A）等于r　（B）大于或等于r　（C）小于r　（D）小于或等于r

2.33（知识点 21，难度系数 0.4）　已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A}) = 3$，求 k。

2.34（知识点 21，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & t\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求 t。

2.35（知识点 22，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量，试证明：

（1）$R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；（2）若 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $R(\boldsymbol{A})<2$。

2.36（知识点 22，难度系数 0.8）　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，证明：

$$R\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\right)+R\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}\right)=n。$$

2.37（知识点 22，难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=n$，证明：$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$。

2.38（知识点 23，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为分块矩阵，且 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$________。

2.39（知识点 23，难度系数 0.8 ）　已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异反对称矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为任意的 n 维列向量，设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}$，证明：$R\left(\boldsymbol{B}\right)=n$。

2.40（知识点 23，难度系数 0.2）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$ 均为可逆方阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$（　）。

（A）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3^{-1}\end{pmatrix}$

2.41（知识点 24，难度系数 0.6，2009 年考研数学一真题）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　）。

（A）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

2.42（知识点 24，难度系数 0.4） 设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$ 是正交矩阵，其中 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶方阵，证明：$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 均为正交矩阵，且 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{O}$。

2.43（知识点 24，难度系数 0.8） 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 为可逆阵，$\boldsymbol{C}$ 为幂等阵（即满足 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{C}$）。

2.44（知识点 24，难度系数 0.6） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{CB}$，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，证明：$n\leqslant R(\boldsymbol{G})<2n$。

2.45（知识点 24，难度系数 0.8） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$ 分别为 m 阶与 n 阶可逆矩阵，证明：分块矩阵 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}$ 都可逆。

第 2 篇综合测试题详解

2.1 解析：注意矩阵乘法不满足消去律，即由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 及 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，但当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$（即 $\boldsymbol{A}$ 可逆）时，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，故（A）、（B）、（C）均错误，（D）正确。

注意：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 与 $|\boldsymbol{A}|=0$ 是两个完全不同的概念，切莫混淆。

解：（D）。

2.2 解析：注意矩阵乘法不满足交换律。由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并可推出 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABCA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$。

解：（D）。

2.3 解析：此题考查矩阵乘法运算的结合律和分配律，注意 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}$。

解：依题可得 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}\text{。}\end{aligned}$$

2.4 解析：类似例 9.3.3 及例 9.3.2.用到招数 9.3.1。

解：矩阵可分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&0\\0&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$。

首先可求得 $\boldsymbol{B}^{12}=\begin{pmatrix}5^{12}&0\\0&7^{12}\end{pmatrix}$。

因为 $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{E}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，其中

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\quad\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^3=\boldsymbol{O}，$$

因此据二项展开式有

$$C^{12}=\left[2E+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\right]^{12}$$

$$=2^{12}E+12\times2^{11}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{12\times11}{2}\times2^{10}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^2$$

$$=2^{12}E+12\times2^{11}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{12\times11}{2}\times2^{10}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{12}&-12\times2^{11}&66\times2^{10}\\0&2^{12}&-12\times2^{11}\\0&0&2^{12}\end{pmatrix}。$$

综上所述，可得

$$A^{12}=\begin{pmatrix}B^{12}&\\&C^{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^{12}&0&0&0&0\\0&7^{12}&0&0&0\\0&0&2^{12}&-12\times2^{11}&66\times2^{10}\\0&0&0&2^{12}&-12\times2^{11}\\0&0&0&0&2^{12}\end{pmatrix}。$$

2.5 解析：（1）数学归纳法；（2）递推法。

（1）**证明**：①先证明 $n=3$ 时结论成立。

根据已知得 $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

则

$$A+A^2-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=A^3。$$

所以 $A^3=A^{3-2}+A^2-E$，即 n=3 时结论成立。

②假设 n=k 时结论成立，即 $A^k=A^{k-2}+A^2-E$ 成立，对其左乘 A 得

$$A^{k+1}=A^{k-1}+A^3-A=A^{k-1}+A+A^2-E-A=A^{(k+1)-2}+A^2-E。$$

所以 n=k+1 时结论成立。

综上可得当 $n\geqslant3$ 时，$A^n=A^{n-2}+A^2-E$。

（2）**解**：据（1）的结论可得如下递推式：

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{A}^{98}+\boldsymbol{A}^{2}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{96}+2\boldsymbol{A}^{2}-2\boldsymbol{E}=\cdots=50\boldsymbol{A}^{2}-49\boldsymbol{E}$$

$$=\begin{pmatrix}50&0&0\\50&50&0\\50&0&50\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}49&0&0\\0&49&0\\0&0&49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}。$$

2.6 解析：虽然 $\boldsymbol{A}$ 不像例 10.3.1 为特殊的矩阵，但是也可以用与它一样的技巧，即招数 9.3.2.试一试先求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，可发现它是一个对角阵。再运用矩阵乘法的结合律。

解：因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&6\end{pmatrix}$，所以

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{n}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)\cdots\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}3&0\\0&6\end{pmatrix}^{n-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{n-1}&0\\0&6^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3^{n-1}+6^{n-1}&-3^{n-1}+2\cdot6^{n-1}&3^{n-1}+6^{n-1}\\-3^{n-1}+2\cdot6^{n-1}&3^{n-1}+4\cdot6^{n-1}&-3^{n-1}+2\cdot6^{n-1}\\3^{n-1}+6^{n-1}&-3^{n-1}+2\cdot6^{n-1}&3^{n-1}+6^{n-1}\end{pmatrix}。$$

2.7 解析：考查方阵的行列式的性质：$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$。它实际上为行列式的第一个性质，站在矩阵的基点上，可以视为矩阵转置的一个性质。

证明：根据 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，两边同时作行列式运算，得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^{n}|\boldsymbol{A}|。$$

又 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，所以 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n}|\boldsymbol{A}|$。当 n 为奇数时，$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$。

2.8 解析：根据 $R(\boldsymbol{A}^{*})=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，然后再分情况判断。

解：当 $R(\boldsymbol{A}^{*})=1$ 时，有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1&-1\\1&a&1&-1\\1&1&a&-1\\1&1&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&a&1&-1\\1&1&a&-1\\1&1&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&a-1&0&0\\1&0&a-1&0\\1&0&-2&a+1\end{vmatrix}$$

$=(a+1)^{2}(a-1)^{2}=0$，则 $a=1$ 或 $a=-1$。

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $R(\boldsymbol{A})=2$，此时 $R(\boldsymbol{A}^{*})=0$

（证明参见例 11.3.4），不符合题意，舍去。故 $a=-1$。

2.9 解析：先化简再计算。因为题设含有伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$，所以先将矩阵方程右乘 $\boldsymbol{A}$，利用公式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 化掉 $\boldsymbol{A}^*$ 后，再作行列式运算，最终可求出 $|\boldsymbol{B}|$。

解：通过计算可得 $|\boldsymbol{A}|=3$，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{E}$。原矩阵方程两边右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{ABA}^*\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{BA}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A},$$

即 $3\boldsymbol{AB}=6\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，整理得 $(3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，两边取行列式得 $|3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$，而

$$|3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&-3\end{vmatrix}=27,$$

因此可得 $|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$。

2.10 解析：因 $\boldsymbol{A}^*$ 已知，故设法让式 $\boldsymbol{AXA}^{-1}=\boldsymbol{XA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$ 中出现 $\boldsymbol{A}^*$，将之左乘 $\boldsymbol{A}^*$ 且右乘 $\boldsymbol{A}$ 即可达到要求，之后用常规做法即可。

解：将矩阵等式 $\boldsymbol{AXA}^{-1}=\boldsymbol{XA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$ 左乘 $\boldsymbol{A}^*$ 且右乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AXA}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{XA}^{-1}\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}。$$

据 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，可得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$。由 $|\boldsymbol{A}^*|=8$ 可知 $|\boldsymbol{A}|=2$，得

$$2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+6\boldsymbol{E},$$

即 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}=6\boldsymbol{E}$，所以

$$\boldsymbol{X}=6\cdot(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=6\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}。$$

2.11 解析：可以先计算 $|\boldsymbol{A}|$ 所有元素的代数余子式再求和，但这样做太烦琐。考虑到若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，故只需通过求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆反过来求出 $\boldsymbol{A}^*$，再把它的所有元素相加即可。

解：因为 $|\boldsymbol{A}|=-\dfrac{1}{4!}\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆。又因为 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，而且

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}^* = -\frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\sum A_{ij} = -\frac{1}{4!}(1+2+3+4) = -\frac{5}{12}$。

2.12 解析： 注意到 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，这个表达式比较复杂，直接求逆有些困难。故应先设法将其化简，可将右端的 $\boldsymbol{E}$ 分解成 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$，再提取公因式。

解： 因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) \\ &= (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}, \end{aligned}$$

所以 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1} = [2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$。

2.13 解析： 根据 $|2\boldsymbol{A}| = 2^n|\boldsymbol{A}| = 2^n|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^*$，以及

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}]^{\mathrm{T}} = [(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{E},$$

可知（A）、（B）、（C）均错误。根据排除法，选（D）。

解：（D）。

2.14 解析： 此题思路必须先从行列式中“跳出来”，设法建立矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$ 的矩阵等式，这需要用到矩阵的乘法，根据矩阵乘法的运算律，采用“迂回”战术来求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|$。其中要用到招数 12.3.2 中矩阵“从无到有”的技巧。

$$\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\right) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{A},$$

两边取行列式，得 $|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}| = |\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{A}|$。

将 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$ 代入上式，得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=3$。

解： 3。

2.15 解析： 根据定义，设法找到一个矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积为单位矩阵。

证明：因为 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，化简得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}。$$

由 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$ 知 $\boldsymbol{B}^{-1}$，$\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ 均存在，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

2.16 解析：设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，设法找到一个矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的乘积为单位矩阵即可。根据 $\boldsymbol{A}$ 中含有两个正交向量的乘积的特点，为了用到正交向量的性质，可作 $\boldsymbol{A}^2$ 试一试。

证明：设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$。因为 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 正交，所以 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$。有下式：

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}),$$

故 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，即 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 可逆。

2.17 解析：若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0, |\boldsymbol{B}|\neq 0$。又 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*|=|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}|\boldsymbol{B}|^{n-1}\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$ 可逆，（B）正确。

易见（A）、（C）、（D）错误:（A）的反例为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$；（C）的反例为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$；（D）的反例为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$。

解：（B）。

2.18 解析：此题技巧性很强。对于幂零矩阵 $\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{O}$），易联想到下式：

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}\right)\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}+\cdots+\boldsymbol{C}^{n-1}\right)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{E}。$$

可见 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}$ 可逆，由此可以设法将 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 转化成单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 与一个幂零矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的差的形式。因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$，可令 $\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，下面只要证明 $\boldsymbol{C}$ 幂零即可。这里用到结论 13.1.1（4），也即招数 13.3.1，将待判断矩阵分解成两个可逆矩阵的乘积。

证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$。令 $\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}\right)$。欲证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，只需证 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}$ 可逆。

因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{BA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。又据 $\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$，可知 $\boldsymbol{C}^n=\left(-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)^n=\left(-\boldsymbol{A}^{-1}\right)^n\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}.$

因为

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}\right)\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}+\cdots+\boldsymbol{C}^{n-1}\right)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆。

2.19 解析：根据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，不能推导出 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，反例为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$，故（A）、（D）均错误；因为 $\left|(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\right|\neq\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|+|\boldsymbol{B}|$，所以（C）错误；因为 $\left|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}\right|=\left|\boldsymbol{P}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$，所以（B）正确。

解：（B）。

2.20 解析：先整理出关于 $\boldsymbol{B}$ 的乘积的表达式，再作行列式运算。由题设，有

$$B(A-E)=2E\text{。}$$

于是 $|B||A-E|=4$，而 $|A-E|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=2$。

解：2。

2.21 解析：充分利用对称阵、反对称阵和矩阵可交换的性质。根据正交矩阵的定义，只需证明 $\left[(A+B)(A-B)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(A+B)(A-B)^{-1}=E$。

证明：因为 A 为对称矩阵，所以 $A^{\mathrm{T}}=A$；因为 B 为反对称矩阵，所以 $B^{\mathrm{T}}=-B$；因为 A、B 可交换，所以 $(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$。

由上面三个结论可得

$$\begin{aligned}\left[(A+B)(A-B)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(A+B)(A-B)^{-1}&=\left[(A-B)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(A+B)^{\mathrm{T}}(A+B)(A-B)^{-1}\\&=\left[(A-B)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}(A+B)^{\mathrm{T}}(A+B)(A-B)^{-1}\\&=(A+B)^{-1}(A+B)^{\mathrm{T}}(A+B)(A-B)^{-1}\\&=(A+B)^{-1}(A-B)(A+B)(A-B)^{-1}\\&=E\end{aligned}$$

所以 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 是正交矩阵。

2.22 解析：已知 A 可逆，故将式 $A^{-1}BA=6A+BA$ 左乘 A 且右乘 A^{-1} 进行化简，之后用常规做法即可。

解：将 $A^{-1}BA=6A+BA$ 右乘 A^{-1} 且左乘 A 得 $B=6A+AB$，于是

$$(E-A)B=6A,$$

即

$$\begin{aligned}B&=6(E-A)^{-1}A\\&=6\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&&\\&\frac{3}{4}&\\&&\frac{6}{7}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{7}\end{pmatrix}\\&=6\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&\frac{4}{3}&\\&&\frac{7}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{7}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

2.23 解析：因为矩阵方程含有 $\boldsymbol{A}^*$，所以考虑用 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 化掉 $\boldsymbol{A}^*$，进一步求 $\boldsymbol{B}$。

解：根据已知易得 $|\boldsymbol{A}|=-2$，所以 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{E}$。对已知矩阵等式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，得 $-2\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{ABA}-8\boldsymbol{A}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，所以对上式右乘矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 并整理得 $-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$，故

$$\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=4\cdot\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}^{-1}=4\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&&\\&-1&\\&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}。$$

2.24 解析：先化简 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再求 $\boldsymbol{A}$。

解：因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$，所以

$$\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$$

$$=\left\{\left[\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\right\}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}。$$

2.25 解析：常规题型。先设法消去 $\boldsymbol{A}^*$ 再求解 $\boldsymbol{X}$。

解：易求得 $|\boldsymbol{A}|=2$。对 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AX}$，整理得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=-(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})。$$

因为 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1&1&0\\1&-2&-1\\2&2&-4\end{vmatrix}=-8\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，上式两边左乘 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$ 可得

$$\boldsymbol{X}=-(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-3&-1&0\\-1&-2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}。$$

2.26 解析：先将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将初等变换与初等矩阵对应，然后据招数 17.3.1 中的口诀“左行右列”，对 $\boldsymbol{A}$ 分别左乘及右乘相应的初等矩阵。要注意变换的先后次序。

解：因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&3\end{pmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\overset{r_2\times\frac{1}{3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_2\leftrightarrow c_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\text{。}$$

即
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\text{，}$$

所以 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$为所求。

2.27 解析：（B）错误，由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BA}$，可得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}$，据矩阵乘法不满足交换律，因此 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{B}$。

（C）错误，应改为经有限次初等行变换（注意不可进行初等列变换）。

（D）错误，因为只要 $|\boldsymbol{A}|\neq 1$，根据 $|\boldsymbol{E}(ij(k))|=1$，此时 $\boldsymbol{A}$ 还可化为其他类型的初等矩阵的乘积。

（A）正确，因为可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 可化成有限个初等矩阵的乘积，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 为初等矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$ 可变形为 $\boldsymbol{AP}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换可变为单位阵 $\boldsymbol{E}$。

解：（A）。

2.28 解析：$\boldsymbol{A}$ 可看作一个对角矩阵进行若干次初等行变换而成的，根据矩阵的初等变换与初等矩阵的关系，可列出 $\boldsymbol{A}$ 用初等矩阵表示的分解式，再据初等矩阵的逆求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解：因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可看作对角矩阵 $\begin{pmatrix}b&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&c\end{pmatrix}$ 依次经过行变换 $r_1\leftrightarrow r_3,r_2\leftrightarrow r_3,r_3\leftrightarrow r_4$ 而成的，根据初等变换与初等矩阵的关系，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}(34)\boldsymbol{E}(23)\boldsymbol{E}(13)\begin{pmatrix}b&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&c\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}(34)\boldsymbol{E}(23)\boldsymbol{E}(13)\boldsymbol{E}(1(b))\boldsymbol{E}(2(d))\boldsymbol{E}(3(a))\boldsymbol{E}(4(c))\text{，}$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}^{-1}(4(c))\boldsymbol{E}^{-1}(3(a))\boldsymbol{E}^{-1}(2(d))\boldsymbol{E}^{-1}(1(b))\boldsymbol{E}^{-1}(13)\boldsymbol{E}^{-1}(23)\boldsymbol{E}^{-1}(34)$$

$$=\boldsymbol{E}(4(\frac{1}{c}))\boldsymbol{E}(3(\frac{1}{a}))\boldsymbol{E}(2(\frac{1}{d}))\boldsymbol{E}(1(\frac{1}{b}))\boldsymbol{E}(13)\boldsymbol{E}(23)\boldsymbol{E}(34)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}。$$

2.29 解析： 若能找到正交阵，使 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同且相似。

根据已知条件可求得 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(4-\lambda)\lambda^3$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 4、0、0、0。又因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以必存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(4,0,0,0)=\boldsymbol{B}$。所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同且相似。应选（A）。

解：（A）。

2.30 解析： 因为等价不仅对应初等行变换，也对应初等列变换，所以（A）与（B）均错误。因为等价方程组中对应矩阵不能作列变换，所以（C）错误。因为等价必等秩，所以（D）正确。

解：（D）。

2.31 解析： 常规题型。利用矩阵的初等行变换求矩阵的秩，再根据秩求矩阵的最高阶非零子式。

解：
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_4-r_1 \\ r_4-2r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}。$$

因为行阶梯形的阶梯数为 4，所以原矩阵的秩为 4。其中一个最高阶非零子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

2.32解析：矩阵秩的定义为：如果$\boldsymbol{A}$有一个r阶子式不为零，而所有的$r+1$阶子式全为零（如果存在的话），则$\boldsymbol{A}$的秩为r。若$\boldsymbol{A}$有一个r阶非零子式，则可保证矩阵的秩不小于r，但这个非零子式未必是最高阶的，也就是说它的$r+1$阶子式未必全为零，因此秩未必为r。故选（B）。

解：（B）。

2.33 解析：本题提供两种做法：（1）初等变换法；（2）行列式法。

解一：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-1&k&2\\0&1&1&3\\1&-1&0&4\\2&0&2&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_4-r_1\\r_5-2r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-5&k-6&0\\0&1&1&3\\0&-3&-3&3\\0&-4&-4&3\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_3+5r_2\\r_4+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&3\\0&0&k-1&15\\0&0&0&12\\0&0&0&15\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&3\\0&0&k-1&0\\0&0&0&15\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为$R(\boldsymbol{A})=3$，则必有$k-1=0$，即$k=1$。

解二：因为$R(\boldsymbol{A})=3$，故其 4 阶子式

$$\begin{vmatrix}1&2&3&1\\2&-1&k&2\\0&1&1&3\\1&-1&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&-5&k-6&0\\0&1&1&3\\0&-3&-3&3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-5&k-6&0\\1&1&3\\0&0&4\end{vmatrix}=0\text{。}$$

解得$k=1$。

2.34 解析：利用结论：①若$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，则$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$；②矩阵的秩为矩阵的最高阶非零子式的阶数。

解：由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$可得$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，有$R(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，从而$R(\boldsymbol{A})<3$。因此$\boldsymbol{A}$的任意 3 阶子式均为 0，故$\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&1&t\end{vmatrix}=5t-15=0$，解得$t=3$。

2.35 解析：利用结论：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$；$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$。

证明：（1）因为

$$R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{\alpha}),R(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\}\leqslant 1,\ R(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{\beta}),R(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\}\leqslant 1,$$

所以

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2\text{。}$$

（2）根据$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$线性相关可知$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，则

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})=R\left[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\right]=R(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha})\leqslant 1<2\text{。}$$

2.36 解析：方法完全类似例 22.3.6。

证明：因为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=2\boldsymbol{E}$，所以

$$R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\geqslant R(2\boldsymbol{E})=n\text{。}\tag{2.36.1}$$

因为由 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{E}$，故 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{O}$，因此

$$R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\leqslant n\text{。}\tag{2.36.2}$$

综合式（2.36.1）、式（2.36.2）得 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=n$。

2.37 解析：此类题型完全是在矩阵秩的性质上做文章，一般无须将矩阵拆解开来，只要根据性质 22.1.1，结合矩阵的运算，就可以得到证明。这里用到的知识点是：左乘或右乘可逆矩阵不改变被乘矩阵的秩。

证明：因为 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=n$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 为非退化的矩阵，故

$$R[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})]=R[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}]=R(\boldsymbol{A})\text{。}$$

又据 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AB}\text{，}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}\text{。}$$

因此 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{BA})=R(\boldsymbol{A})$。

因为 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，同理可得 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{BA})=R(\boldsymbol{B})$，故 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$。

2.38 解析：用待定元素法。

解：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为 n 阶、s 阶方阵，且存在矩阵 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{21} & \boldsymbol{Y}_{22}\end{pmatrix}=\boldsymbol{X}^{-1}$，满足：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{21} & \boldsymbol{Y}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_s\end{pmatrix}\text{，即}\begin{pmatrix}\boldsymbol{AY}_{11} & \boldsymbol{AY}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{11}+\boldsymbol{BY}_{21} & \boldsymbol{Y}_{12}+\boldsymbol{BY}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_s\end{pmatrix}\text{。}$$

据矩阵相等的概念有

$$\begin{cases}\boldsymbol{AY}_{11}=\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{AY}_{12}=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_{11}+\boldsymbol{BY}_{21}=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_{12}+\boldsymbol{BY}_{22}=\boldsymbol{E}_s\end{cases}\text{，即}\begin{cases}\boldsymbol{Y}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{Y}_{12}=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_{21}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{Y}_{22}=\boldsymbol{B}^{-1}\end{cases}\text{。}$$

因此 $\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$。

2.39 解析：利用分块矩阵右乘初等矩阵，对应矩阵的初等列变换，设法将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的最后一列全变为 0。

证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$。下面证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为反对称阵。

因为 $\boldsymbol{A}$ 非奇异（即可逆），所以存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，等式两边作转置得

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\text{，}$$

故 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为反对称阵。

$$\begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}b \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & -b^{\mathrm{T}}A^{-1}b \end{pmatrix}$$

因为 $(b^{\mathrm{T}}A^{-1}b)^{\mathrm{T}}=b^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}b=-b^{\mathrm{T}}A^{-1}b$，且 $b^{\mathrm{T}}A^{-1}b$ 是一个数，所以 $b^{\mathrm{T}}A^{-1}b=0$，因此

$$\begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}b \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}。$$

上式可以看成对 $\begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$ 作若干次初等列变换，根据初等变换不改变矩阵的秩，可得

$$R(B)=R\left[\begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\right]=R\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\right]=R(A)=n。$$

2.40 解析：用“待定元素法”求解。

设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & O & A_2 \\ O & A_3 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1X_{11} & A_1X_{12} & A_1X_{13} \\ A_2X_{31} & A_2X_{32} & A_2X_{33} \\ A_3X_{21} & A_3X_{22} & A_3X_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & O & O \\ O & E_2 & O \\ O & O & E_3 \end{pmatrix}。$$

上式两端对比可得 $\begin{cases} A_1X_{11}=E_1 \\ A_2X_{32}=E_2 \\ A_3X_{23}=E_3 \end{cases}$，即得 $\begin{cases} X_{11}=A_1^{-1} \\ X_{32}=A_2^{-1} \\ X_{23}=A_3^{-1} \end{cases}$，其余 X_{ij} 全为 O。故选（A）。

解：（A）。

2.41 解析：根据伴随矩阵的性质：$AA^*=A^*A=|A|E$，当 A 可逆时，有 $A^*=|A|A^{-1}$。

因为 A 与 B 可逆，所以 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆，于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=(-1)^2\begin{vmatrix} B & O \\ O & A \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} \\ &=|B||A|\cdot\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix} O & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & O \end{pmatrix} \\ &=6\cdot\begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}。\end{aligned}$$

故（B）正确。

解：（B）。

注意：易犯错误$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。实际上，应该先进行初等变换将其变为分块对角阵，然后再求值：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = (-1)^n |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$$

其中，n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数。

2.42 解析：本题考查正交矩阵的概念，注意可逆矩阵的应用。

证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}。$$

因此可得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$ 。

因为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}$ ，故 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵。

因为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 可逆，故 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{O}$ 。

因为 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵。

2.43 解析：此类题目很抽象，似乎难以下手。一般的技巧是先尽量将它化为标准形，标准形有三种：一是初等变换下的标准形，二是相似变换下的标准形，三是合同变换下的标准形，最好用相似变换化标准形，因为它可以保留矩阵尽量多的性质，但是相似变换化标准形需要一定的条件，因此不便用它的话就用初等变换化标准形，这些变换都能够写成乘法运算的形式。因为标准形的性质容易表现出来，所以可以通过标准形的性质得到原矩阵的性质，这就是所谓的“等价化简”的思想（参见知识点 31）。

证明：对矩阵 $\boldsymbol{A}$，必有可逆阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}，即 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}。$$

注意到

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = (\boldsymbol{QP})^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$， $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{QP})^{-1}$，则

$$\boldsymbol{C}^2 = \left[\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\right]^2 = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{C}。$$

所以 $\boldsymbol{C}$ 为幂等阵， $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{QP})^{-1}$ 为可逆阵，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为所求。

2.44 解析：由于 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，而分块阵 $\boldsymbol{G}$ 中含有 $\boldsymbol{A}$，故显然有 $R(\boldsymbol{G}) \geqslant n$。要证 $R(\boldsymbol{G})<2n$，只要证明 $\boldsymbol{G}$ 为降秩矩阵，即只要证明 $|\boldsymbol{G}| = 0$。思路是对矩阵 $\boldsymbol{G}$ 左乘一个适当的可逆的分

块矩阵，使得它相乘后的矩阵可以明确地求出行列式的值。这里分块矩阵的构造需要一定的技巧，关键是根据 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$ ， $\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{CB}$ ，设法使分块矩阵被乘后含 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}$ 及 $\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}$ 。

证明： 由于 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ ，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $R(\boldsymbol{A})=n$ 。而 $\boldsymbol{G}$ 含有 $\boldsymbol{A}$，故有 $R(\boldsymbol{G})\geqslant n$。下面证明 $R(\boldsymbol{G})<2n$。

利用已知条件，在 $\boldsymbol{G}$ 的左边乘一个矩阵，有

$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{vmatrix}-\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=0。$$

而

$$\begin{vmatrix}-\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^n|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|^{-1}=(-1)^n\neq 0,$$

因此

$$|\boldsymbol{G}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=0。$$

从而 $\boldsymbol{G}$ 为降秩矩阵，即有 $R(\boldsymbol{G})<2n$。综上即得 $n\leqslant R(\boldsymbol{G})<2n$。

提示： 注意左乘矩阵后，使得原矩阵左上角的元素均化为零，从而取行列式得到所要的结论，这里左乘矩阵是关键。

2.45 解析： 这里介绍两种方法。方法一：根据逆矩阵的定义来证明。必要性利用待定元素法证明，充分性可以从必要性的证明过程得到启发，构造出分块矩阵的逆的形式。方法二：用一个矩阵右乘 $\boldsymbol{H}$，设法将 $\boldsymbol{H}$ 右上角分块矩阵化为 $\boldsymbol{O}$，利用 $\boldsymbol{H}$ 可逆的充分必要条件 $|\boldsymbol{H}|\neq 0$ 来证明。上述两种方法各有优劣，第一种方法缺点是难度大，但它的优点是能够求出逆矩阵的形式；第二种方法优点是简单，但它的缺点是不能求出逆矩阵的形式。

证明一：（1）必要性。设 $\boldsymbol{H}$ 可逆，且逆矩阵

$$\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}\end{pmatrix}。$$

则

$$\boldsymbol{HH}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}。$$

比较上式等式两边可得

$$\boldsymbol{AK}+\boldsymbol{BM}=\boldsymbol{E}_m, \tag{2.45.1}$$

$$\boldsymbol{AL}+\boldsymbol{BN}=\boldsymbol{O}, \tag{2.45.2}$$

$$\boldsymbol{CK}+\boldsymbol{DM}=\boldsymbol{O}, \tag{2.45.3}$$

$$\boldsymbol{CL}+\boldsymbol{DN}=\boldsymbol{E}_n。 \tag{2.45.4}$$

由式（2.45.2），得

$$A^{-1}AL + A^{-1}BN = O,$$

即

$$L = -A^{-1}BN。$$

同理由式（2.45.3），有

$$M = -D^{-1}CK。$$

将 $M = -D^{-1}CK$ 代入式（2.45.1），有

$$AK + B(-D^{-1}CK) = (A - BD^{-1}C)K = E_m,$$

故 $A - BD^{-1}C$ 可逆。

将 L 代入式（2.45.4），同理可得 $D - CA^{-1}B$ 也可逆。

（2）充分性。设 $A - BD^{-1}C$、$D - CA^{-1}B$ 都可逆，且设

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = K,\quad (D - CA^{-1}B)^{-1} = N,$$

则

$$(A - BD^{-1}C)K = E_m,\quad (D - CA^{-1}B)N = E_n。$$

令

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} K & -A^{-1}BN \\ -D^{-1}CK & N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}BN \\ -D^{-1}CK & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} HQ &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}BN \\ -D^{-1}CK & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)K & O \\ O & (D - CA^{-1}B)N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= E, \end{aligned}$$

即 H 为可逆方阵，且它的逆矩阵为 Q。

证明二： 由于 A 可逆，即 A^{-1} 存在，而

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}。$$

又因为

$$\begin{vmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{vmatrix} = 1,$$

于是

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{vmatrix} \tag{2.45.5}$$
$$=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|。$$

又由于 $\boldsymbol{D}$ 可逆，故

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

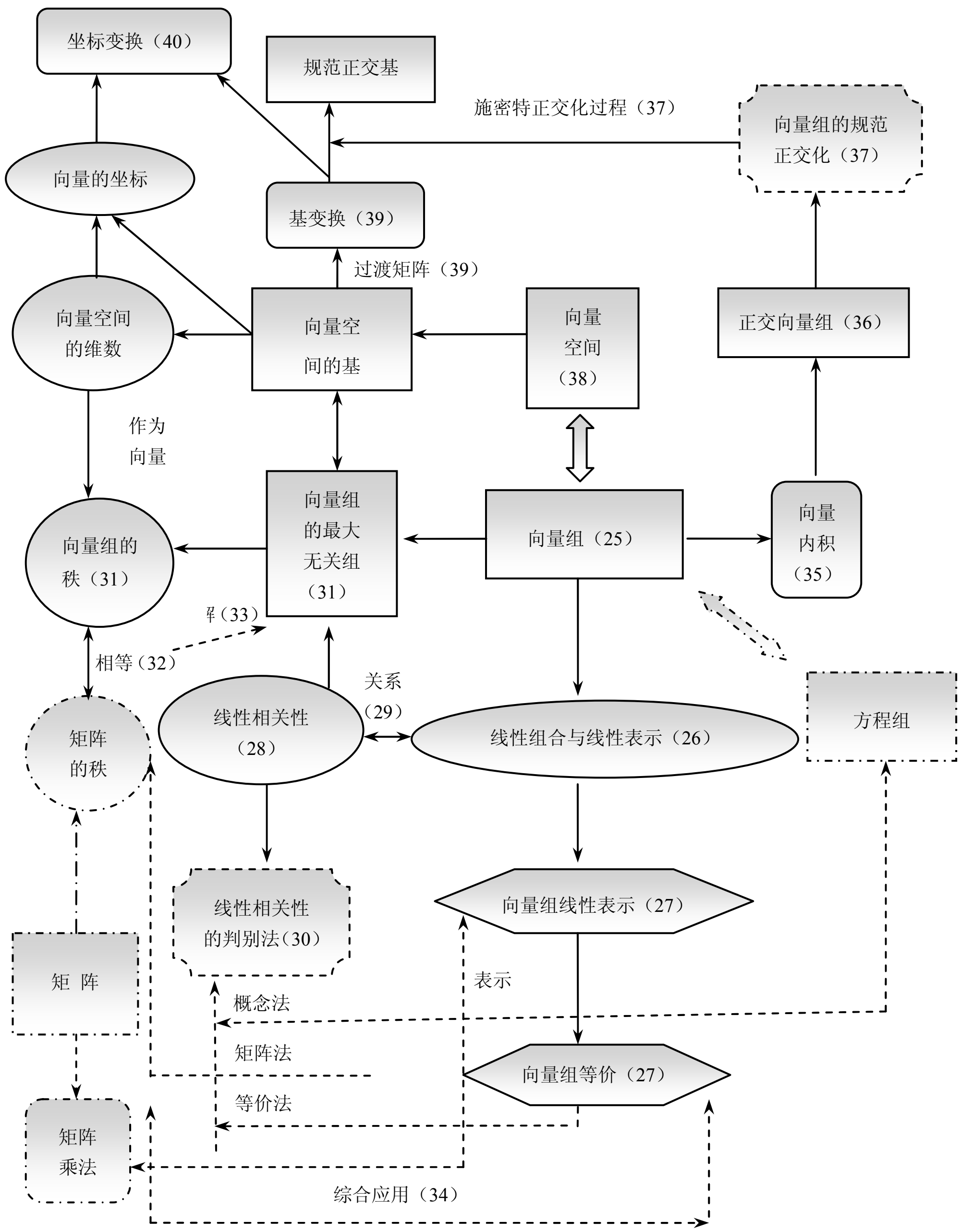
则

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\cdot|\boldsymbol{D}|。 \tag{2.45.6}$$

因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$ 可逆，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{D}|\neq 0$，于是由式（2.45.5）和式（2.45.6）可知，$\boldsymbol{H}$ 可逆即 $|\boldsymbol{H}|\neq 0$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|\neq 0$ 和 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 都可逆。

第 3 篇　向量

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点序号。

第 3 篇

综　　述

向量[25]是本课程的一个主要工具。向量可以看成一种特殊的矩阵，因此它的运算与矩阵的运算完全相同。

本篇的定理和结论是最多的，它们常常用来做证明题，因此是线性代数课程的重点与难点。本篇最核心、最难理解的概念为向量组的线性相关性[28][30]。若向量组线性相关（至少含两个向量），则可比喻为向量组中存在“多余”的向量，即它可以被其他向量线性表示，向量组除去“多余”向量后的部分组即为此向量组的最大无关组[31][33]。向量组的等价是本篇的另一个重要概念，所谓向量组等价，就是两个向量组能够相互线性表示[26][27]。

向量组有个奇妙的性质，即“变量定数”，意思是一个向量组中“多余”的向量虽然不是唯一确定的，但是其最大无关组中包含的向量的数目必是确定的，正因为如此，这个数可称为向量组的秩，它同时也是向量组等价下的一个不变量。在计算与证明中，一般的技巧是先定“数”，再找“量”。向量组的最大无关组是与原向量组等价的最“精炼”的部分组。

需要重点掌握的是向量组与矩阵的联系，这里有两个非常重要的结论：（1）通过矩阵的行（列）分块，可以得出矩阵的秩等于对应行（列）向量组的秩[32]；（2）矩阵的最高阶非零子式对应的行（列）向量组为行（列）向量组的最大无关组。

本篇的定理与结论之间具有非常密切的联系，记住它们有一个窍门：以上面的两个结论作为总纲，其他定理或结论大都可以用它们推导出来，也就是说这两个结论可以将第 3 篇的绝大部分定理和结论串联在一起！大家可以尝试一下[34]，对理解定理和结论非常有帮助。

特别要提到的是向量的内积，它可以用矩阵乘法来定义。向量的内积[35]可以为向量赋以“度量”，即向量的长度与夹角。一个与之相关的重要概念就是正交向量组[36]，关于它的一个重要结论就是正交向量组必为线性无关组，反之不然。由单位正交向量组构

成的正交矩阵有许多非常好的性质，它在第 6 篇二次型利用正交变换化标准形的运算中起着重要的作用，因此当有必要时可将线性无关向量组通过施密特正交化过程[37]变为等价的正交向量组。

向量空间是同维数向量的集合[38]，它含两种运算：加法与数乘，即线性运算。此集合需要满足向量关于加法与数乘两种运算封闭。在专业的《高等代数》中，向量空间是一个很重要的概念，但在本课程中不算是重点，仅需要掌握基、维数、坐标和子空间等基本概念即可，基对应向量组的最大无关组，维数对应向量组的秩，相当于将向量空间作为向量组（向量组却不能作为向量空间），其应用也很有局限，比如线性方程组的解空间。部分考生需要掌握向量空间的基变换与坐标变换[39][40]，这两个概念与一些相关概念都需要用到向量与矩阵的联系。

注：文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握，并根据自己的实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

更多资源请扫二维码：

知识点 25　向量的概念及运算

更多资源请扫二维码:

25.1　概念、结论

1. 概念

定义 25.1.1　*n* 维向量　n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 n 维向量，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，其中第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量。向量可以写成一行，也可以写成一列，分别称为行向量与列向量，记为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

定义 25.1.2　实向量、复向量　分量全为实数的向量称为实向量，分量全为复数的向量称为复向量。

2. 结论

结论 25.1.1　向量的运算与矩阵的运算完全相同。

25.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 26，知识点 35
- **综述**：向量是本课程的第二个重要工具，实际上它也是一种特殊的矩阵，所以向量的运算与矩阵的运算完全相同，无须另外介绍。注意向量写成行或列均可，这只是形式上的不同，涉及运算时，行向量与列向量必须区别开来。

25.3　经典例题精解巧析

例 25.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 35）　下列命题正确的是（　）。

（A）若 $\|\boldsymbol{a}\|>\|\boldsymbol{b}\|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$　　（B）若 $\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

（C）若 $\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 可能共线　　（D）若 $\|\boldsymbol{a}\|\neq\|\boldsymbol{b}\|$，则 $\boldsymbol{a}$ 一定不与 $\boldsymbol{b}$ 共线

解析：本题考查向量相等与向量共线的概念。

因为向量既有大小又有方向，所以只有模（长度）相等、方向相同的两个向量才相等，故（B）错误；因为向量不能直接比较大小，故（A）错误；两个向量的模虽然不相

等，但是可以平行或共线，故（D）错误。根据排除法，应选（C）。

解：（C）

知识点 26　向量组的线性组合与线性表示

更多资源请扫二维码:

26.1　概念、定理及结论

1. 概念

定义 26.1.1　向量组　若干个同维数的列向量（或行向量）所组成的集合称为向量组。

定义 26.1.2　线性组合　给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，表达式 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$ 称为向量组 A 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为此线性组合的系数。

定义 26.1.3　线性表示　给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$，则称向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 A 的线性组合，或称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示。

2. 定理

定理 26.1.1　向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ 的秩，也即线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解。

3. 结论

结论 26.1.1　线性表示与矩阵的关系

向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能被向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示当且仅当存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{m\times l}$，使得

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{K}_{m\times l}。$$

26.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 25，知识点 27，知识点 28
- **综述**：向量组的线性组合与线性表示是提出线性相关性概念的前提。所谓向量

组的线性组合，就是若干个向量通过加法与数乘两种线性运算组合而成的表达式。向量组的线性表示的判断往往要结合方程组与矩阵，大家可以结合第 2 篇与第 4 篇来学习。

26.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 23.3.5

例 26.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 46）　给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$。试判断$\boldsymbol{\alpha}_4$是否为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合。若是，请求出该组合的系数。

解析: 判断线性组合的问题可转化为解线性方程组$\boldsymbol{\alpha}_4=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，若其有解，则$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，否则不能。

解： 设有一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $\boldsymbol{\alpha}_4=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 成立，即有方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$。对此方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1+2r_2\\r_4-3r_2\\r_3\times\frac{1}{2}}}{\sim}\begin{pmatrix}0&-5&3&-2\\1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+3r_3\\r_1\leftrightarrow r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&-5&3&-2\\0&1&1&2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2+5r_3\\r_4-13r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3\div 8\\r_4+14r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_3\\r_1-3r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故方程组有唯一解 $\boldsymbol{x}=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，所求组合的系数为 $x_1=2$，$x_2=x_3=1$。

招数 26.3.1　妙招：利用向量、矩阵及方程组的联系求解有关向量的题目。

实际上，向量、矩阵与线性方程组是密不可分的，“亲密”到了“你中有我，我中有你”的程度。大家在解题过程中会自觉或不自觉地运用到它们之间的联系。若想在做题时将三者做到融会贯通，则应该主动地研究它们之间的联系。

例 26.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 46）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+\lambda,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+\lambda,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1+\lambda)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(0,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$，问：

（1）λ为何值时，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$唯一地线性表示?

（2）λ为何值时，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不唯一?

（3）λ为何值时，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示?

解析：类似例 26.3.1，用到招数 26.3.1. 这是一个利用向量被向量组线性表示与方程组的联系来解题的典型例题，此题可转化成求解含参数的线性方程组的问题。

解：设$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则它对应的方程组为

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2。\end{cases}\tag{26.1}$$

可求得其系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)。$$

（1）当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，方程组（26.1）有唯一解，所以$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$唯一地线性表示。

（2）当$\lambda=0$时，方程组（26.1）的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=1<3$，方程组（26.1）有无穷多解，所以$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不唯一。

（3）当$\lambda=-3$时，方程组（26.1）的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&-3\\1&1&-2&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&1&-3\\0&-3&3&-6\\0&0&0&6\end{pmatrix},$$

由$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，故$R(\boldsymbol{A})\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组（26.1）无解，所以$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

例 26.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 46 ） 已知线性方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5,\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5,\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=c_5,\\ d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=d_5。\end{cases}$$

的通解为$(2,1,0,3)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，记$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,5$，问：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示?

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示?

解析：（1）先将方程组对应向量组，再利用非齐次线性方程组通解的形式，可以得到两个列向量组中向量之间的关系式，同时也可以由通解判断列向量组的秩；（2）假设$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，通过判断列向量组的秩后发现矛盾，因此$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，

$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

（1）**解：** 原方程组可表示为向量形式：$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_5$，已知它的通解为 $(2,1,0,3)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，可得

① $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_5$；

② $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$；

③ $4-R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=1$，即 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$。

由②知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示。

（2）**解：** 假设 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，又根据（1）可知 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant 2$，这与③中的结论 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$ 矛盾，假设不成立，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

招数 26.3.2　怪招：利用方程组的解给出的信息解向量的题目。

解线性方程组的一般思路是根据其对应的矩阵或向量组的信息，判断出方程组解的状况。某些关于方程组的特殊题型正好相反：用抽象方程组的通解给出的解向量的信息判断原方程组对应的列向量的情况。方程组的通解至少可以给出两方面的信息：一方面可通过它判断方程组对应矩阵的秩；另一方面可利用方程组与向量的联系得出方程组对应列向量的一些线性表示式。

知识点 27　向量组之间的线性表示及等价

更多资源请扫二维码:

27.1　概念、定理与结论

1．概念

定义 27.1.1　向量组等价　若向量组 A 中任意的向量都能被向量组 B 线性表示，则称向量组 A 能被向量组 B 线性表示。若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组等价。

2．定理

定理 27.1.1　向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$ 的秩，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$。

定理 27.1.2　设向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，则 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots$

$,\boldsymbol{b}_l)\leqslant R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$。

定理 27.1.3 向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 等价的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$是向量组 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所构成的矩阵。

3．结论

结论 27.1.1 向量组之间线性表示的矩阵表示式

若 n 维列向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$能被 n 维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性表示，则存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{t\times s}$，使得$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)\boldsymbol{K}_{t\times s}$

27.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 26，知识点 28
- **综述**：向量组之间的线性表示是向量被向量组线性表示的推广，向量组之间能相互线性表示即向量组等价，等价是向量组之间的一个重要关系。在第 2 篇的知识点 16 中提到，“等价”是本课程的重要思想，而向量组的等价是“等价”思想在向量组上的体现。判断向量组等价有多种方法，显然根据概念判断是困难的，实际常常采用解矩阵方程的方法，即“三秩相等法”（定理 27.1.3）。由于涉及向量组线性表示及等价的判断均需要用到诸如解线性方程组及求向量组的秩等知识，所以本节都是跨知识点的题目。

27.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 16.3.3，例 38.3.3

例 27.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 15、47） 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$中各向量被向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$线性表示的表达式。

解析：根据结论 27.1.1，把向量组的线性表示式转化为矩阵方程求解。

解：令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)$。下面解矩阵方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$。因为

$$(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\,|\,\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&2&2&3\\0&1&1&0&-1&4\\0&0&1&1&3&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-r_3\\r_1-r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-1&3\\0&1&0&-1&-4&4\\0&0&1&1&3&0\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1-r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&-1\\0&1&0&-1&-4&4\\0&0&1&1&3&0\end{array}\right),$$

所以 $X = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$。故可得 $\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3$，$\alpha_2 = 3\beta_1 - 4\beta_2 + 3\beta_3$，$\alpha_3 = -\beta_1 + 4\beta_2$。

招数 27.3.1　妙招：利用求解矩阵方程一次“搞定”数个方程组的解。

求数个向量被向量组线性表示的表示式是困难的，因为需要求解多个线性方程组。例 27.3.1 中用求解矩阵方程的方法一次可“搞定”数个方程组的解，其原理是这些方程组具有同样的系数矩阵，根据矩阵分块的原理可将它们“组装”成矩阵方程。如例 27.3.1 需要解如下三个方程组：

$$(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \beta_3)x_1 = \alpha_1，(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \beta_3)x_2 = \alpha_2，(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \beta_3)x_3 = \alpha_3。$$

它们可组合成矩阵方程 $(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \beta_3)X = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$，其中 $X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$。

这种方法很巧妙，省去了许多计算过程。

例 27.3.2（难度系数 0.4，跨知识点 31）　设 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) = r$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 均为 n 维向量组，则下列结论正确的是（　）。

（A）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价

（B）$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) = r$

（C）当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

（D）当 $s = t$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价

解析：（A）错误，因为等秩的向量组未必等价，反例为：$\alpha_1 = (1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0), \alpha_2 = (0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0)$；$\beta_1 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0), \beta_2 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$，所以（A）错误。（B）错误，反例同（A）；（D）错误，因为向量组的等价与向量组中所含向量的个数无关。

根据排除法，选（C）。

下面说明（C）为何正确：不妨假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的最大无关组，且它们均为列向量。

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表示，即存在系数阵 $K_{r\times r}$，使得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)K_{r\times r}。$$

因为 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r) = R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r) = r$，所以 $K_{r\times r}$ 满秩，于是

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)K_{r\times r}^{-1},$$

即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示。

解：（C）。

例27.3.3（难度系数0.6，跨知识点43）　设有向量组（I）$\alpha_1 = (1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (1,1,3)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$ 和向量组（II）$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$。试问 a 为何值时，向量组（I）与（II）等价?

解析：用“三秩相等法”判断向量组等价，即利用定理 27.1.3 先求秩，再讨论 a。

解：
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}$$
$$\overset{r_3-2r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{pmatrix}。$$

当 $a=-1$ 时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，向量组（I）与（II）不等价。

当 $a\neq-1$ 时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$。根据
$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&0&0\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}$$
$$=-3\begin{vmatrix}1&1\\a+6&a+4\end{vmatrix}=-3\times(-2)=6\neq0，$$
得 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$。由于向量组（I）与（II）均为3维向量组，且
$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3。$$
因此当 $a\neq-1$ 时向量组（I）与（II）等价。

例 27.3.4（难度系数 0.4，跨知识点 30）　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，证明：向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 与向量组（II）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$ 等价。

解析：证明向量组等价的一般方法是确认它们能够相互线性表示。这里提供另一种方法，即将（I）、（II）两个向量组组合成一个“大”的向量组（III），（I）、（II）均为（III）的部分组，这样只要证明这两个向量组均为这个“大”向量组（III）的最大无关组，它们就等价。此方法最适用于两个向量组中有许多向量相同的情况。

证明：设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，且不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是其一个最大无关组。根据 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，可得向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 及（II）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$ 的秩均为 $r+1$。

因为向量组（III）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，所以它的秩不超过 $r+1$。又由向量组（I）及（II）的秩均为 $r+1$，可得向量组（III）的秩为 $r+1$，则向量组（III）中任意向量个数为 $r+1$ 的线性无关部分组均为最大无关组。

综上可得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\gamma}$ 均为向量组（III）的最大无关组，因此它们等价。最后根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的最大无关组，因为最大无关组与原向量组等价，所以可得向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 与向量组（II）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$ 亦等价。

小结：证明两个向量组等价的方法及原理

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 均为 n 维列向量组。欲证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价，有下列三种常见的方法。

（1）三秩相等法。即证明

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)。$$

如例 27.3.3。

原理：根据定理 27.1.3，利用向量组线性表示的矩阵表示法，将向量组的表示对应矩阵方程，再利用矩阵方程有解的充分必要条件可证。

（2）化行最简形法。即证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_t^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 有相同的行最简形，如例 38.3.3。

原理：根据矩阵行变换对应行向量的线性组合及向量组等价的传递性。

（3）**求系数矩阵法**。即求系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{t\times s}$ 与 $\boldsymbol{U}_{s\times t}$ 使得下面两式成立：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{K}_{t\times s},$$
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{U}_{s\times t}。$$

原理：直接根据向量组线性表示的矩阵表示法。此方法计算复杂，很少采用。

（4）**矩阵的行（列）变换法。**

方法与原理参见招数 41.3.1，此方法适用范围小，仅在特殊情况下使用。

知识点 28　向量组线性相关与线性无关的概念

更多资源请扫二维码:

28.1　概念

定义 28.1.1　线性相关　给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，则称向量组 A 线性相关。

定义 28.1.2　线性无关　给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，如果 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全为零，则称向量组 A 线性无关。

28.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 26，知识点 29

● **综述**：向量组的线性无关与线性相关是本课程最重要、最难理解的概念，虽然它概念的形式很简单，仅含一个等式：$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$，但是它非常抽象，不好理解。大家可以分两步来理解它：第一步，向量组中的向量通过一个等式“相关”；第二步，这个相关的等式是一个“线性”式。含两个以上向量的向量组线性相关的通俗理解就是向量组有“水分”，即至少有一个向量能被其他向量线性表示，通俗地说就是这个向量是“多余”的。由此概念也可衍生出一系列定理和结论，本知识点着重讲线性相关的概念及利用概念进行判断的方法。

28.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 36.3.2

例 28.3.1（难度系数 0.4）　设$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，试证：向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关。

解析：常规题型。直接套用定义证明，最终归于求齐次线性方程组的解。

证明：设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$。将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的表达式代入得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r)=\mathbf{0}。$$

整理得

$$(k_1+k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}。$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，可得

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0,\\ k_2+\cdots+k_r=0,\\ \qquad\cdots\\ k_r=0。\end{cases}$$

解此方程组得$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，因此向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关。

例 28.3.2（难度系数 0.4）　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为 n 维列向量组，且 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的 n 阶矩阵。证明：当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关时，$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_m$也线性相关；当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关时，$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_m$也线性无关。

解析：利用定义证明。注意 $\boldsymbol{A}$ 可逆，用它左乘线性相关的定义式即可。

证明：设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则存在一组不全为零的数$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}。$$

等式两边左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，则有

$$\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m)=\lambda_1\boldsymbol{A\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{A\alpha}_m=\mathbf{0},$$

从而得$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_m$线性相关。

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关。设存在一组数$k_1,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{A\alpha}_m=\mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=\boldsymbol{0}$。

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以对上式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$。根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关得 $k_1=\cdots=k_m=0$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

例 28.3.3（难度系数 0.6）　已知 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，求 k 的值。

解析：据向量组的线性相关对应方程组有非零解，从而求出 k 的值。

解：因为 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性相关，所以存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得

$$\begin{aligned}\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2+\lambda_3\boldsymbol{b}_3&=\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_1)\\&=(\lambda_1+k\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-\lambda_1k+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，得

$$\begin{cases}\lambda_1+k\lambda_3=0,\\-\lambda_1k+\lambda_2=0,\\\lambda_2+\lambda_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{pmatrix}1&0&k\\-k&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}。$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不全为零，故此齐次线性方程组有非零解，其系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix}1&0&k\\-k&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1-k^2=0。$$

从而得 $k=\pm1$。

例 28.3.4（难度系数 0.6）　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由该向量组线性表示，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由该向量组线性表示，试证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关。

解析：假设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{0}$，下面证 $k_1=k_2=\cdots=k_m=k=0$。因为条件中有“不可…”字样，所以考虑用反证法先确定 $k=0$，再根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，易得 $k_1=k_2=\cdots=k_m=k=0$。

证明：因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，所以存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m。$$

设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{0}$。

若 $k\neq0$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_2&=\frac{1}{k}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)+\boldsymbol{\beta}_1\\&=\frac{1}{k}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m\\&=\left(\frac{k_1}{k}+\lambda_1\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\left(\frac{k_m}{k}+\lambda_m\right)\boldsymbol{\alpha}_m,\end{aligned}$$

这与已知$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示矛盾，故$k=0$。此时有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$线性无关。

知识点 29　线性表示与线性相关性的关系

更多资源请扫二维码:

29.1　结论

结论 29.1.1　线性表示与线性相关

含两个或两个以上向量的向量组线性相关当且仅当其中至少有一个向量能被其他向量线性表示。

29.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 28，知识点 30
- **综述**：线性表示与线性相关这两个概念关系密切。若含两个以上向量的向量组线性相关，则必存在一个向量可被其他向量线性表示。还有一个结论就是可以根据定理 27.1.2 得出一个结论：若数目多的向量组可被数目少的向量组线性表示，则含向量数目多的向量组必线性相关，此结论揭示了向量组的一个有趣的事实，就是含k个向量的线性无关向量组最多只能表示出另一个含k个向量的线性无关向量组，称为“一个萝卜一个坑”。由它可以直接推导出“等价的向量组必等秩”的重要结论。

29.3　经典例题精解巧析

例 29.3.1（难度系数 0.6）　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，则以下命题中不成立的是（　）。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1$不能被$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_2$不能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示

（C）$\boldsymbol{\alpha}_4$能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关

解析：首先有结论：$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。证明如下：因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，所以$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，从而$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则（C）的结论必成立，从而（D）的结论也必成立。

其次有结论：$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示。用反证法证明如下：若$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，由前面的结论知$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，这与题设相矛盾。所以$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，即（A）成立。

由排除法，选（B）。

解：（B）。

例 29.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 30，38）　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$n$维向量组，证明它们线性无关的充分必要条件为：任意$n$维向量均可由它们线性表示。

解析： 只需证明n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$等价于向量空间$\mathbb{R}^n$的规范正交基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$（$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，…，$\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$），结合向量空间$\mathbb{R}^n$的基的概念来讨论。

证明： 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，则它必是$\mathbb{R}^n$的一组基，此时$\mathbb{R}^n$的任一$n$维向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示。

若任一n维向量都可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，则$n$维坐标向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$也可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$显然能由基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性表示，故两向量组等价。从而$R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)=R\left(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\right)=n$。所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关。

招数 29.3.1　绝招：用向量空间的“基”代替“任意向量”。

当遇到“任意向量”这个说法时，大家往往会感到棘手。这里有一种“替代”法，即若涉及向量空间的任意向量，则用向量空间的基代替之，即用有限个向量代替无限个向量，其原理是向量空间的基可以表示向量空间的所有向量。这样做之后，问题往往会迎刃而解，这是一种常用的技巧。

知识点 30　线性相关性的判别法

更多资源请扫二维码:

30.1　定理

定理 30.1.1　列向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵的秩$R$（$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$）$<m$；列向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性无关的充分必要条件是$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=m$。

定理 30.1.2　（1）若向量组A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性相关，则向量组$B$：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$也线性相关。反之，若向量组$B$线性无关，则向量组$A$也线性无关。

（2）线性无关的向量组加分量亦线性无关。

（3）m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量的个数m时一定线性相关，特别地，$n+1$个n维向量一定线性相关。

（4）设向量组A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性无关，而向量组$B$：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}$线性相关，则向量$\boldsymbol{b}$必能由向量组$A$线性表示，且表示式是唯一的。

30.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频：4**
- **最关联知识点：**知识点 28，知识点 29
- **综述：**判断或证明向量组线性相关性的方法一般有以下三种。

（1）定义法（方程组法）：先设出线性相关定义式中的系数和等式，将系数当未知量，对应齐次线性方程组，判断其是否有非零解，有则线性相关，无则线性无关。

（2）矩阵法：把列（或行）向量组成矩阵，若矩阵列（或行）满秩则线性无关，否则线性相关。实际上，此方法是由定义法演变而来的。

（3）向量组关系法：根据等价的向量组必等秩，以及矩阵乘法的秩的性质等，得到所求向量组与另一个向量组的关系，根据另一个向量组的情况，可得原向量组的秩，最后判定线性相关性。此方法也包括利用定理 30.1.2（1）及定理 30.1.2（2）中的方法判定。

30.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 16.3.2，例 27.3.4，例 29.3.2，例 50.3.2

例 30.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 6）　设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$。

（1）t 为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

（2）t 为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关；

（3）当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关时，将$\boldsymbol{\alpha}_3$表示成$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合。

解析：基础题型。（1）若行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；（2）若$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关；（3）用解非齐次线性方程组的方法解题。

解：设$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，代入$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的值得

$$x_1(1,1,1)^{\mathrm{T}}+x_2(1,2,3)^{\mathrm{T}}+x_3(1,3,t)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}。$$

因此

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+3x_3=0,\\ x_1+3x_2+tx_3=0。\end{cases}$$

因为$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5$，所以

（1）当$t\neq 5$时，$D\neq 0$，方程组只有零解，即$x_1=x_2=x_3=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

（2）当$t=5$时，$D=0$，方程组有非零解，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关。

（3）当$t=5$时，令$x_3=1$，易得一个非零解$x_1=1$，$x_2=-2$，$x_3=1$，故$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$。

招数 30.3.1　无招胜有招：判断或证明向量组线性相关及线性无关的固定“设”法。

判断或证明线性相关性的题目有相当一部分是根据其定义，或者一开始根据定义作

假设。所以遇到此类题目时，“不管三七二十一”，可先“设”出常数：如判断或证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性相关性时，先设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$。

开始并不需要管 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是否全为零，它仅仅是一种假设而已，若之后判断出 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必全为零，则其线性无关；若判断出 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 有不全为零的情况，则其线性相关。总之这样假设总不会错。

例 30.3.2（难度系数 0.4）　设有 4 个向量组

① $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$，$(b,c,d)^{\mathrm{T}}$，$(d,e,f)^{\mathrm{T}}$，$(f,g,h)^{\mathrm{T}}$

② $(a,1,b,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(c,0,d,2,0)^{\mathrm{T}}$，$(e,0,f,0,3)^{\mathrm{T}}$

③ $(a,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$(b,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$(c,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$(d,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

④ $(1,0,3,1)^{\mathrm{T}}$，$(-1,3,0,-2)^{\mathrm{T}}$，$(2,1,7,2)^{\mathrm{T}}$，$(4,2,14,5)^{\mathrm{T}}$。

则下列结论正确的是（　）。

（A）线性相关的向量组为①、④，线性无关的向量组为②、③

（B）线性相关的向量组为③、④，线性无关的向量组为①、②

（C）线性相关的向量组为①、②、④，线性无关的向量组为③

（D）线性相关的向量组为①、③、④，线性无关的向量组为②

解析：①向量个数大于维数的向量组一定线性相关；②易见 3 维向量组$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,3)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，根据线性无关的向量组加分量后仍线性无关，可得原向量组亦线性无关；

③因为将之对应矩阵有 $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4-3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以矩阵的秩为 2，即其列向量组的秩为 2<4，故原向量组线性相关。

④因为将之对应矩阵有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_2\leftrightarrow r_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2\times(-1) \\ r_4-3r_2 \\ r_3\leftrightarrow r_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以矩阵的秩为 3，即其列向量组的秩为 3<4，故原向量组线性相关。

解：（D）。

例 30.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 24）　设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 列线性无关，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C}$，证明：矩阵 $\boldsymbol{C}$ 列线性无关的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列线性无关。

解析：矩阵列线性无关指的是矩阵对应的列向量组线性无关。欲证矩阵列线性无关，可先根据向量组线性无关的定义，然后解对应的齐次线性方程组，最后根据方程组解的结构定理判断它无非零解。

证明：必要性，设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 列线性无关。记 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)$。设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{R}$，

使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}\ 。$$

记 $\boldsymbol{k} = \left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{Ak} = \mathbf{0}$。两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{BAk} = \boldsymbol{Ck} = \mathbf{0}$。因为 $\boldsymbol{C}$ 列线性无关，所以方程组 $\boldsymbol{Ck} = \mathbf{0}$ 仅零解，即 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列线性无关。

充分性，设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列线性无关。记 $\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n\right)$。设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$，使

$$\lambda_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{\gamma}_n = \mathbf{0}\ 。$$

记 $\boldsymbol{z} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{Cz} = \boldsymbol{BAz} = \mathbf{0}$。因为已知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 列线性无关，所以 $\boldsymbol{Az} = \mathbf{0}$，又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列线性无关，所以 $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$，即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$，从而矩阵 $\boldsymbol{C}$ 列线性无关。

例 30.3.4（难度系数 0.4，跨知识点 24，2004 年考研数学一、数学二真题）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　）。

（A）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

（B）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

（C）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

（D）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

解析：只需将矩阵按列分块，将分块矩阵的运算与向量组的线性组合相对应，即可得出结论。

设 $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)_{n\times l}$。又设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组。则根据分块矩阵的乘法运算法则，可将 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 改写为

$$b_{1k}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{2k}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{nk}\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}，\quad k = 1, 2, \cdots, l\ 。$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵，故上述 l 个等式中至少有一个等式的系数不全为零，这说明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关。另一方面，将 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 两边取转置得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$。因为 $\boldsymbol{A}$ 非零，同理可得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组线性相关，即 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关。故（A）正确。

解：（A）。

例 30.3.5（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2 = l\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_3 = l\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$，$l \neq 0$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

解析：定义法，先把题目给出的 3 个已知等式合并同类项，再左乘 $\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E}$，即得证。

证明：根据已知 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2 = l\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_3 = l\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$，可得

$$(\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1 = 0，\ (\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2 = l\boldsymbol{\alpha}_1，\ (\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3 = l\boldsymbol{\alpha}_2\ 。$$

设有一组数 x_1, x_2, x_3，使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$，对它左乘 $\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E}$，得 $x_2 l\boldsymbol{\alpha}_1 + x_3 l\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$。因为 $l \neq 0$，所以 $x_2\boldsymbol{\alpha}_1 + x_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$。再左乘 $\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E}$，得 $x_3 l\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$，因此 $x_3 = 0$。将 $x_3 = 0$ 代入 $x_2\boldsymbol{\alpha}_1 + x_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$，得 $x_2\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$，所以 $x_2 = 0$。将 $x_3 = 0$ 及 $x_2 = 0$ 代入等式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$，得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$，因此 $x_1 = 0$。

因为 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

知识点 31　向量组的最大线性无关组和向量组的秩的概念

更多资源请扫二维码：

31.1　概念

定义 31.1.1　最大线性无关向量组与向量组的秩　设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 组成向量组 A_0，满足：

（1）向量组 A_0 线性无关；

（2）向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果存在的话）都线性相关。

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组，简称最大无关组，最大无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩，记作 R_A。

定义 31.1.2　最大无关组的等价定义　设向量组 A_0：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量组 A 的一个部分组，且满足：

（1）向量组 A_0 线性无关；

（2）向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示。

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组。

31.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 28
- **综述**：向量组的最大无关组是与原向量组等价的最“精炼”的部分组，向量组的最大无关组一般不唯一，但是其中包含向量的个数却是不变的，此数称为向量组的秩（将向量组的最大无关组呈现的这种性质称为“变量定数”）。在此概念中同样涉及了“等价”的思想，其最终目的还是为了化简向量组。本知识点除了理解概念之外，还必须掌握常规的求向量组的最大无关组的题型。另外还有一些抽象的证明题，大都是基于上述“等价化简”的指导思想。

31.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 27.3.2

例 31.3.1（难度系数 0.4）　设 $R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)=r$，试证 $R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}\right)=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示。

解析：本题考查最大无关组的定义及等价。对于必要性，先设出$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个最大无关组，然后利用秩相等，由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ “切换”到$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$，最后利用最大无关组的概念表示出$\beta$；充分性是利用“等价的向量组必等秩”的结论来证明。详细分析请看招数 31.3.1 中的“变量定数法”。

证明：必要性：设$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)=r$。根据$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$，不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个最大无关组。由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$的秩相等，因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$的一个最大无关组，所以$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示。故$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示。

充分性：若β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，则两向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$等价，根据等价的向量组必等秩，可知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$的秩相等，即

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)=r。$$

招数 31.3.1　绝招：用“变量定数法”结合等价的思想求解有关向量的证明题。

在本知识点综述中提到向量组的最大无关组与秩有“变量定数”的特征，因此在做向量有关的证明题时，只要紧紧抓住向量组的“秩”这个“定数”，就不怕向量组这个“变量”了，要善于在“数”与“量”之间灵活地切换，切换的前提条件就是要保持“等价”，失去了等价的变换是无意义的。一般的经验是先确定“数”，即向量组的秩，然后再确定“量”，即向量组的最大无关组。注意例 31.3.1、例 31.3.2 及例 31.3.3 均用到了它。

例 31.3.2（难度系数 0.6）　若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$的秩为 3，且此向量组与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$等价，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$的秩为 3。

解析：综合题型。需要证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$的最大无关组含 3 个向量。充分利用等价的概念来转化问题，尤其注意向量组的最大无关组与原向量组等价这个事实。

证明：因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$的秩为 3，所以其最大无关组含有 3 个向量。不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为其一个最大无关组。

根据向量组的最大无关组与原向量组等价，且已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$等价，可得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$等价，所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

因为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$的一个最大无关组。故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6$的秩为 3。

例 31.3.3（难度系数 0.6）　证明：已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$有相同的秩，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$等价。

解析：只需证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$具有相同的最大无关组。道理同例 27.3.4，且其证明过程符合招数 31.3.1 中“变量定数法”的原理。

证明：不妨假设它们的秩都是t，则有 $t\leqslant r$。不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$中的前$t$个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的一个最大线性无关组，因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示。因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$的秩也是$t$，又知其前$t$个向量线性无关，则此向量组中的任意向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示。

综上所述，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都可以由前 t 个向量线性表示，即它们有相同的最大线性无关组，根据向量组的最大无关组与原向量组等价及等价的传递性，可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价。

例 31.3.4（难度系数 0.6，跨知识点 34）　已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 3，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4。

解析： 综合题型。考查向量组的秩、最大无关组与向量组之间线性表示的关系。用反证法较方便。注意根据招数 31.3.1 中“变量定数”的原理，由向量组的秩设出最大无关组是关键。

证明： 反证法，假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩小于 4，因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 3，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，并且 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 可唯一地由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩均为 3，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个最大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可唯一地由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

综上可知，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 可唯一地由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

另一方面，根据已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，这与上面证得的 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可唯一地由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示相矛盾，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4。

知识点 32　矩阵的秩与向量组的秩的关系

更多资源请扫二维码:

32.1　定理

定理 32.1.1　矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩。

32.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：** 4
- **最关联知识点：** 知识点 31
- **综述：** 矩阵的秩与其对应行（列）向量组的秩相等，称为“三秩相等”（注意：“三秩相等”这个词也适用于向量组等价的证明，参见例 27.3.3）。此性质将矩阵、向量组用秩联系起来。由定理 32.1.1，可通过矩阵的秩来求向量组的秩，这是一种常规题型。当然，用此定理还可以解一些抽象矩阵与向量组的题型，比如抽象矩阵按列分块，对其

作初等列变换，这样对应于列向量可以作各种线性组合，因为矩阵的初等变换不改变其秩，所以对应列向量的组合也不改变秩。

32.3 经典例题精解巧析

例 32.3.1（难度系数 0.2） 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，则 $t=$____。

解析：根据矩阵的秩等于其行（列）向量组的秩，因此求向量组的秩的问题可转化为求矩阵的秩的问题。除了用初等变换可以求矩阵的秩外，也可以用矩阵的子式来求矩阵的秩。向量组的秩为 2 即其组成的矩阵的秩为 2，也就是矩阵的任一 3 阶子式均为零。因为这里只需求 t 的值，所以只要求一个含 t 的 3 阶子式即可。

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，所以矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}$ 的秩也为 2，即 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 2，且所有 3 阶子式均为零，故 $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & t\\ 0 & -4 & 5\end{vmatrix}=0$，解得 $t=3$。

解：3。

例 32.3.2（难度系数 0.8） 设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1，向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2，向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_3，证明：$\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$。

解析：根据向量组的秩等于矩阵的秩，可将向量组的秩的问题转化为矩阵的秩的问题。注意转化为矩阵的秩的问题后，可通过分析矩阵的最高阶非零子式来证明，这里须概念清晰。

解：不妨设题目中的向量均为列向量，进一步设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),$$
$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)。$$

根据向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1，向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2，再根据矩阵的秩等于向量组的秩，可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩分别为 r_1 与 r_2，于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别有一个 r_1 阶非零子式 D_A 与 r_2 阶非零子式 D_B，显然它们均为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的非零子式，但未必是 $\boldsymbol{C}$ 的最高阶非零子式，因此有 $\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3$。

另一方面，若将 D_A、D_B 对应的所有列向量一并列出成为一个向量组 $\boldsymbol{C}_1$（若两个向量组中有相同的向量，则重复列出），显然 $\boldsymbol{C}_1$ 能表示出 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组，但未必是 $\boldsymbol{C}$ 的最大无关组，因此有 $r_3\leqslant r_1+r_2$。

综上所述，结论 $\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$ 成立。

例 32.3.3（难度系数 0.6） 证明：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$。

解析：这是一个经典结论。本题采用两种做法：第一种是将矩阵对应行向量组，用

向量组解决矩阵的问题；第二种是利用分块矩阵。后一种方法更简捷且巧妙。

证明：方法一：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，$R(\boldsymbol{A})=r$，且 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_{i2}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的最大无关组，设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，$R(\boldsymbol{B})=s$，且 $\boldsymbol{\beta}_{j1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_{j2}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{js}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的最大无关组，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的每个行向量都可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_{i2}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_{j1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_{j2}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{js}^{\mathrm{T}}$ 线性表示，故

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r+s=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})。$$

方法二：利用分块矩阵的秩的性质，有

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})。$$

知识点 33　求向量组的最大无关组

更多资源请扫二维码:

33.1　结论

结论 33.1.1　向量组的最大无关组的求法

矩阵的行阶梯形中，每一个阶梯对应的原矩阵的列向量组为所求列向量组的最大无关组.

33.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 32
- **综述**：此知识点的题目比较单纯。求向量组的最大无关组的常规方法是将向量组中的向量写成列向量的形式，然后将之组成一个矩阵。先将矩阵作初等行变换化为行阶梯形，其阶梯的个数即为向量组的秩。在求出了其秩的基础上，再将每个阶梯各保留一列，“擦除”其他列，最后保留的列对应的原矩阵的列向量组为其最大无关组，这是基于招数 31.3.1 中提及的“变量定数法”的原理，其详细解释见招数 33.3.1。

33.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 13.3.2

例 33.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 20、21） 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,6,7)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=(5,6,7,8)^{\mathrm{T}},$$

求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩和一个最大无关组，并把不属于最大无关组的向量用此最大无关组线性表示。

解析：常规题型。它考查矩阵的秩和其最高阶非零子式的关系，同时考查用矩阵求向量组的最大无关组的秩的常规方法，其中用到了矩阵的秩与对应向量组的秩相等的结论。将向量组按列组成矩阵作初等行变换，具体解释见招数 33.3.1 中的“妙招”。

解：将列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$对应矩阵，然后对矩阵作初等行变换化行最简形：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1-r_2\\r_2-r_3\\r_3-r_4}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\5&6&7&8\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。\tag{33.1}$$

故$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个最大无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2。$$

招数 33.3.1 妙招：列向量组成矩阵作行变换的好处

有些学生不明白：为什么要将列向量组成矩阵作行变换呢？实际上，这样做的好处在于可以在原有的初等行变换的基础上同时“抹去”相同的列，此时初等行变换的变换式仍然成立！从而无须另列变换式，达到了简化运算的目的。如例 33.3.1，同时“抹去”初等行变换式（33.1）的第 3、4 列，可得到

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}。$$

抹去这两列后，左右两边矩阵的秩不变，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是原矩阵列向量组的一个最大无关组。

同时，为了把不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示，必须求解对应的线性方程组，大家求解方程组时也不必另作初等行变换，直接将上面的初等行变换式稍作变化即可。如求$\boldsymbol{\alpha}_3$被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$表示的线性表示式，则必须解线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_3$。只要“抹去”式（33.1）中初等变换的第 4 列，得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 即成为方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_3$ 的增广阵。在“抹去”第 4 列的同时，增广阵的行最简形已经呈现出来。实际上，也可以用矩阵的初等行变换求对应行向量组的最大无关组，具体见例 33.3.2。

例 33.3.2（难度系数 0.6）　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3\\2&2&2&3&-2\\-1&-3&0&-5&5\\4&2&1&3&-7\end{pmatrix}$ 的秩与一个最高阶非零子式，并求出对应的行向量组与列向量组的最大无关组。

解析：此题类似例 33.3.1。

解：因为

$$\boldsymbol{A}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1\\r_4-4r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3\\0&4&-2&7&-8\\0&-4&2&-7&8\\0&6&-7&11&-19\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+r_2\\r_4\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3\\0&4&-2&7&-8\\0&6&-7&11&-19\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_3-\frac{3}{2}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3\\0&4&-2&7&-8\\0&0&-4&\dfrac{1}{2}&-7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\tag{33.2}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3。$\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&2&2\\4&2&1\end{vmatrix}=-16$。

因为 $\boldsymbol{A}$ 的行变换式（33.2）中除去最后两列后秩不变，即

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&2&2\\-1&-3&0\\4&2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-2\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}$。

取 $\boldsymbol{A}$ 的 1、2、4 行组成新的矩阵作初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3\\2&2&2&3&-2\\4&2&1&3&-7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3\\0&4&-2&7&-8\\0&0&-4&\dfrac{1}{2}&-7\end{pmatrix},\tag{33.3}$$

根据矩阵的行秩与列秩相等，可知其行秩仍然为 3，而式（33.3）作为行向量组的部分组的秩也为 3，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的最大无关组为：$(1,-1,2,-2,3),(2,2,2,3,-2),(4,2,1,3,-7)$。

招数 33.3.2　险招:用初等行变换求行向量组的最大无关组

例 33.3.2 中用矩阵的初等行变换求行向量组的最大无关组，这样做有一个小“风险”：根据矩阵的行秩等于列秩，可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为 3，若 $\boldsymbol{A}$ 的 1、2、4 行组成的矩阵作初等行变换后的阶梯形的阶梯数为 2（这是有可能的），则必须另取 3 行作初等行变换，直到阶梯形阶梯数为 3 为止。这就是为什么一般不采用这种方法的原因。

例 33.3.3（难度系数 0.4） 判断下列向量组是否线性相关，若线性相关，则求它的一个最大无关组；若线性无关，则增加一个向量使之仍线性无关。

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,2,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,2,2),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0,0,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(2,0,4,6,2)\text{。}$$

解析：判断线性相关性同上。关键在于后一问，求出线性无关组后，将其写成行向量的形式，组成矩阵作行变换，这样容易看清楚应如何加向量使之仍然线性无关。

解：因为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\-1&0&1&0\\2&1&0&4\\2&2&0&6\\-1&2&-1&2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1\\r_4-2r_1\\r_5+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&0&2\\0&-1&2&0\\0&0&2&2\\0&3&-2&4\end{pmatrix}$

$$\overset{\substack{r_3+r_2\\r_5-3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&0&2\\0&0&2&2\\0&0&2&2\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_4-r_3\\r_5+r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&0&2\\0&0&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{。}\tag{33.4}$$

故 $R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=3$，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关。因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换后的前 3 个列向量线性无关，所以原向量组的最大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$。

因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2&2&-1\\1&0&1&2&2\\-1&1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&2&-1\\0&1&-1&0&3\\0&0&2&2&0\end{pmatrix},$$

上面的矩阵增加 $\boldsymbol{e}$=(0,0,0,1,0)，则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{e}\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&2&-1\\0&1&-1&0&3\\0&0&2&2&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

所以增加向量 $\boldsymbol{e}$ 后，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{e}$ 仍然线性无关。

例 33.3.4（难度系数 0.6） 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维列向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$；$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\k&4&6\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个最大线性无关组，

并将其余向量用最大线性无关组线性表示。

解析：此题先求 $R(\boldsymbol{B})$，再求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的最大无关组。关键在于 k 的取值，对 k 分两种情况讨论。

解：对 k 分两种情况讨论。

（1）当 $k\neq 2$ 时，依题易求得 $R(\boldsymbol{B})=2$。由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，可得 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$ 可知 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，所以 $R(\boldsymbol{A})=1$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个最大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$。

由题设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\\ 2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}。\end{cases}$$

解得 $(2-k)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$。

因为 $k\neq 2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，于是得 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}\boldsymbol{\alpha}_1$。

（2）当 $k=2$ 时，依题易求得 $R(\boldsymbol{B})=1$，同理可得 $1\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$。

设 $R(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的最大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，且有 $\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{\lambda-1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1$，$\lambda$ 为任意常数；

设 $R(\boldsymbol{A})=2$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个最大线性无关组。

知识点 34　有关向量组的定理的综合运用

更多资源请扫二维码：

34.1　概念、定理及结论

定理 34.1.1　若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则 $R_{\boldsymbol{B}}\leqslant R_{\boldsymbol{A}}$。

注：除定理 34.1.1 外，此知识点的其他概念、定理与结论均引用其他相关知识点。

34.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 28，知识点 29，知识点 30，知识点 31，知识点 32
- **综述**：相比于其他篇章，本篇涉及的定理与结论是最多的，它们之间有着密切的联系，在本篇综述中已经说明，这里不再赘述。大家要熟练掌握它们并得到如下启发：这些定理的证明过程中需要用到矩阵、向量与线性方程组之间的联系，它们可以互为工具地解决问题。综合题一般都有一定的难度，它们涉及多个定理或结论，须遵循隐含在

其背后的总方法与总原则，做题时才不至于茫然失措。

34.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 31.3.4

例 34.3.1（难度系数 0.4） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则（ ）。

（A）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关

（B）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

（C）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关

（D）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

解析： 利用矩阵乘法的秩的性质，也用到矩阵的秩与向量组的秩的关系。

选择（D），理由如下：已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant m$，又 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，因此

$$R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{E})=m,$$

故 $R(\boldsymbol{A})=m$，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关。

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 可得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，同理可证 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的行向量组即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关。

解：（D）。

例 34.3.2（难度系数 0.8，跨知识点 45） 设列向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，列向量组（II）$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 可由（I）线性表示，即存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{r\times s}=\left(k_{ij}\right)_{r\times s}$，使得

$$\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\right)\boldsymbol{K}_{r\times s}\text{。}$$

记 $\boldsymbol{B}_{n\times s}=\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s\right)$，$\boldsymbol{A}_{n\times r}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\right)$，证明：向量组（II）线性无关当且仅当 $R(\boldsymbol{K}_{r\times s})=s$。

解析： 必要性根据矩阵乘法的秩的性质。充分性有两种证法：（1）通过对应的齐次线性方程组只有零解来证明；（2）先将列向量组（II）对应矩阵，它们分别对应两个齐次线性方程组，只需证明方程组 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，两个方程组同解当且仅当系数矩阵的秩相等。

证明：①必要性， 因为列向量组（II）线性无关，所以

$$s=R(\boldsymbol{B}_{n\times s})=R(\boldsymbol{A}_{n\times r}\boldsymbol{K}_{r\times s})\leqslant R(\boldsymbol{K}_{r\times s})\leqslant\min\{s,r\}\leqslant s\text{，即 }R(\boldsymbol{K}_{r\times s})=s\text{。}$$

②充分性，（证法一） 只需证明 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解。

因为向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，即 $R(\boldsymbol{A}_{n\times r})=r$，所以 $\boldsymbol{A}_{n\times r}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{K}_{r\times s}\boldsymbol{x}$。又因为 $R(\boldsymbol{K}_{r\times s})=s$，故 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解。于是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{AKx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组（II）线性无关。

（证法二） 只需要证明 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 同解。

一方面，若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 的解，对其左乘 $\boldsymbol{A}$，可得 $\boldsymbol{AKx}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解。

另一方面，向量组（I）线性无关，所以 $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，于是若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Kx})=\boldsymbol{0}$ 的解，则它必是 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 的解。

综上可得 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 同解，即其解空间的维数相同，因此 $s-R(\boldsymbol{B})=s-R(\boldsymbol{K})$，$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{K})$。故向量组（II）线性无关。

例 34.3.3（难度系数 0.6，跨知识点 43） 证明：如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

解析： 这里有两种做法。（1）先利用向量组线性表示与矩阵的对应，然后再根据线性相关性的定义，最后归结于解方程组；（2）向量组与矩阵对应后再利用矩阵乘法的秩的性质。

证明：（方法一） 因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，所以可设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=a_{13}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{23}\boldsymbol{\alpha}_2。\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$，则有矩阵等式 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{A}$。

设有一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，那么有

$$\boldsymbol{0}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}。$$

由于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的方程个数小于未知量的个数，所以它必有非零解，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

（方法二） 设已知向量组中的向量均为列向量，记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，可知存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$，因此

$$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{AK})\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant 2<3,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例 34.3.4（难度系数 0.6） 已知 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关，证明：

（1）如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0} \tag{34.1}$$

成立，则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 或者全为零，或者全不为零。

（2）如果还有一个等式

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}, \tag{34.2}$$

其中 $l_1\neq 0$，则 $\dfrac{k_1}{l_1}=\dfrac{k_2}{l_2}=\cdots=\dfrac{k_m}{l_m}$.

解析：直接利用向量组线性相关的概念式证明。遇到要证明“A 或 B”的结论时，可采用“非 A 则 B”的方法来证，即先假设 A 不成立，只要证明 B 成立即可。

证明：（1）式（34.1）中，如果存在某个 $k_i=0$，则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}\text{。}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意 $m-1$ 个向量都线性无关，所以 $k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_m$ 都等于 0，故系数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 或者全为零，或者全不为零。

（2）因为 $l_1\neq 0$，所以根据（1）的结论，$l_1,l_2,\cdots,l_m$ 全不为零。式（34.2）可变形得 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{l_2}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\dfrac{l_m}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_m$，将其代入式（34.1）得

$$k_1\left(-\frac{l_2}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{l_m}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_m\right)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}\text{。}$$

即 $\left(-\dfrac{l_2}{l_1}k_1+k_2\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\dfrac{l_m}{l_1}k_1+k_m\right)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，所以

$$-\frac{l_2}{l_1}k_1+k_2=0,\cdots,-\frac{l_m}{l_1}k_1+k_m=0\text{。}$$

整理得 $\dfrac{k_1}{l_1}=\dfrac{k_2}{l_2}=\cdots=\dfrac{k_m}{l_m}$。

例 34.3.5（难度系数 0.8，跨知识点 35）　证明：n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2] & \cdots & [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n]\\ [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2] & \cdots & [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2] & \cdots & [\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n]\end{vmatrix}\neq 0\text{。}$$

解析：此题看起来有点“怪异”，会让人觉得无从下手。事实上，针对已知条件是关于向量而求证的是关于行列式（或矩阵）的题目，一般都是利用矩阵与向量的联系来解答。因为条件是向量组线性无关，所以先将它“组合”成矩阵，则该矩阵满秩。此题的一个关键是要将行列式中的矩阵“拆解”成两个矩阵的乘积。

证明：设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2] & \cdots & [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n]\\ [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2] & \cdots & [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2] & \cdots & [\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n]\end{pmatrix}\text{。}$$

矩阵两边作行列式运算得

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^2=D\text{。}$$

所以 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $D\neq 0$。证毕。

招数 35.3.1　趣招：向量的内积与矩阵乘法的相互转化。

从例 34.3.5 可见，矩阵的乘法可以拆解成向量的内积；反过来，向量的内积也可以组合成矩阵的乘法。大家可以将矩阵的乘法看成向量内积的推广。同样，矩阵的加法与数乘可以看作向量的加法与数乘的推广。这样理解概念对解题很有帮助。

知识点 35　内积的概念及性质

更多资源请扫二维码:

35.1　概念、定理及性质

1．概念

定义 35.1.1　内积　设有 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，令 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$称为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积。当 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 均为列向量时有$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$。

定义 35.1.2　n 维向量的长度　设有 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，令

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

$\|\boldsymbol{x}\|$称为 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度（或范数）。当$\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量。

定义 35.1.3　向量的夹角　设有 n 维向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\theta=\arccos\frac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

称为向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的夹角。

2．定理

定理 35.1.1　若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是一组两两正交的 n 维非零向量，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关。

3．性质

性质 35.1.1　内积的性质

下面的 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 为 n 维向量，λ为实数，则：

（1）$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}]$；

（2）$[\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\lambda[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$；

（3）$[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}]+[\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$；

（4）当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]=0$；当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]>0$。

性质 35.1.2　向量长度的性质

（1）非负性：当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|>0$；当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$。

（2）齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$。

（3）三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$。

35.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 36，知识点 37
- **综述**：向量的内积、长度与夹角等概念在高等数学课程中有提及，本课程将这些概念推广到 n 维空间。考研的学生最好结合《高等数学》中对应的章节一起复习，这样可以提高学习效率。本课程提出此概念的主要目的是为了引出向量的正交及正交向量组。

35.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 34.3.5

例 35.3.1（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，且 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$，有 4 个等式：

①$\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|$；②$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$；③$[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})]=0$；④$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$。

其中正确的等式个数为（　）。

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

解析：①错误，因为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$ 只能说明 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直，不能说明 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 长度相等。

②正确，因为

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2&=[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]\\&=\left[\|\boldsymbol{a}\|^2+2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+\|\boldsymbol{b}\|^2\right]-\left[\|\boldsymbol{a}\|^2-2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+\|\boldsymbol{b}\|^2\right]=4[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0\text{。}\end{aligned}$$

所以 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2$，即 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$。

③错误，因为 $[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=\|\boldsymbol{a}\|^2\neq0$。

④正确，因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$，且 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$。

综上，有 2 个等式正确。选（C）。

解：（C）。

例 35.3.2（难度系数 0.4，跨高等数学学科综合题）　已知

$$\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{3}\sin x,\cos x\right),\ \boldsymbol{b}=(\cos x,\cos x),$$

$f(x)=2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+2m-1$，$(x,m\in\mathbb{R})$。

（1）求 $f(x)$ 的表达式，并求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的最小值为 5，求 m 的值。

解析： 综合题型。若 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，则其最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$。再考虑最值。

解：（1）因为

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x+2m-1\\&=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2m\\&=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2m。\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π。

（2）当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$。所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $2m-1$，于是 $2m-1=5$，$m=3$。

例 35.3.3（难度系数 0.6）　已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 中任意两个向量都不平行，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，试证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$。

解析： 考查向量平行的代数式。先设法构造出含向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的等式，再利用已知条件确定等式中的数来判断。

证明： 由已知，存在 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，使 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$，根据 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 中任意两个向量都不平行，可得 $\lambda,\mu\neq 0$，因此

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1+\lambda)\boldsymbol{c},\\\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1+\mu)\boldsymbol{a}。\end{cases}$$

上式中两个方程相减，得

$$(1+\lambda)\boldsymbol{c}=(1+\mu)\boldsymbol{a}。$$

再根据 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，可得 $\lambda=-1,\mu=-1$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$。

例 35.3.4（难度系数 0.6）　设两个向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 满足 $\|\boldsymbol{e}_1\|=2$，$\|\boldsymbol{e}_2\|=1$，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，若向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为钝角，求实数 t 的取值范围。

解析： 因为两向量的夹角为钝角，所以它们的内积小于 0，但应该去掉向量反向平行的情况。

解： 因为 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]=\|\boldsymbol{e}_1\|\|\boldsymbol{e}_2\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\times 1\times\frac{1}{2}=1$，所以

$$\begin{aligned}[2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2]&=2t\|\boldsymbol{e}_1\|^2+7t\|\boldsymbol{e}_2\|^2+(2t^2+7)[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\\&=8t+7t+2t^2+7=2t^2+15t+7。\end{aligned}$$

由已知向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为钝角得 $2t^2+15t+7<0$，解得 $-7<t<-\frac{1}{2}$。

当向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 反向平行时，$2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)$，$\lambda<0$，则

$$\begin{cases}2t=\lambda,\\ \lambda t=7\text{。}\end{cases}$$

即得 $t=-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ 或 $t=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$。舍去这两种情况。故 t 的取值范围为

$$\left(-7,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{14}}{2},-\frac{1}{2}\right)\text{。}$$

知识点 36　正交向量组、正交阵及其性质

更多资源请扫二维码:

36.1　概念、结论

1．概念

定义 36.1.1　正交向量组　两两正交的非零向量组称为正交向量组。

定义 36.1.2　正交矩阵　如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$（即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$），那么称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，简称正交阵。

定义 36.1.3　正交变换　若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为正交变换。

2．结论

结论 36.1.1　正交向量组必为线性无关组。

36.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**4
- **最关联知识点：**知识点 35，知识点 37
- **综述：**正交向量组必为线性无关组，这是正交向量组最重要的性质，但其逆命题不成立。正交向量组的优点是可以对它的线性组合作内积运算，因为正交的向量内积为零，用此性质可以化简含正交向量线性组合的等式。正交阵是由正交向量组合成的矩阵，其特点是其转置矩阵等于其逆矩阵，此性质可衍生出许多矩阵运算的技巧。正交变换中的变换矩阵即为正交阵，正交变换保持向量的长度与内积不变。

36.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 14.3.5

例 36.3.1（难度系数 0.6，跨知识点 37、44）　已知正交单位向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)。$$

（1）求 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是正交单位向量组；

（2）求一个以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}$ 为第 1、2 列的正交矩阵。

解析： 重点在第一问，提供两种做法。第一种，将问题转化为求齐次线性方程组的基础解系；第二种，先任意选取两个向量 $\boldsymbol{\beta}_3$、$\boldsymbol{\beta}_4$（尽可能简单），使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关，再使用施密特正交化过程即得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$。

解：（1）**方法一：** 依题，$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量。将方程组展开得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_4=0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{1}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4=0。\end{cases}$$

其系数阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

所以同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=-x_4\end{cases}$，通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\ c_1,c_2\text{ 为任意常数。}$$

取其基础解系并单位化得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,0,-1,1)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 即为所求。

方法二： 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以取 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0,0)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(0,0,1,0)$，易见 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关。

下面将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 规范正交化。

先正交化：$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，

$$\gamma_3=\beta_3-\frac{[\beta_3,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1-\frac{[\beta_3,\alpha_2]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2=\beta_3-\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0\right),$$

$$\gamma_4=\beta_4-\frac{[\beta_4,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1-\frac{[\beta_4,\alpha_2]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2-\frac{[\beta_4,\gamma_3]}{[\gamma_3,\gamma_3]}\gamma_3=\beta_4-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2=\left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)。$$

再单位化，于是得到一个正交单位向量组：

$$\alpha_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \alpha_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

$$\alpha_3=\frac{\gamma_3}{\|\gamma_3\|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),\ \alpha_4=\frac{\gamma_4}{\|\gamma_4\|}=\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)。$$

（2）将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$分别转置为列向量，组合成矩阵即为所求的正交阵，故

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}。$$

例 36.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 28、41、44）　设n维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，且它们与非零向量$\beta_1,\beta_2$正交，证明：$\beta_1,\beta_2$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta_1$线性无关。

解析：综合题。先根据向量正交构造出齐次线性方程组，再根据齐次线性方程组系数矩阵的秩和基础解系中解的数目的关系判断β_1,β_2线性相关，最后结合线性无关与正交的定义来证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta_1$线性无关。

证明：因为n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，所以$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})=n-1$。

根据已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$与非零向量$\beta_1$正交，即$\alpha_1^{\mathrm{T}}\beta_1=0,\alpha_2^{\mathrm{T}}\beta_1=0,\cdots,\alpha_{n-1}^{\mathrm{T}}\beta_1=0$，亦即$\beta_1$是齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解，其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})^{\mathrm{T}}$，同理$\beta_2$也是齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解。故$R(\beta_1,\beta_2)\leqslant n-R(A)=1$，所以$\beta_1,\beta_2$线性相关。

设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n-1}\alpha_{n-1}+x_n\beta_1=\mathbf{0}\tag{36.1}$$

式（36.1）左乘β_1^{T}，根据$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$与非零向量$\beta_1$正交，得$x_n\beta_1^{\mathrm{T}}\beta_1=x_n\|\beta_1\|^2=0$，因为$\beta_1$非零，故得$x_n=0$，代入式（36.1），得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_1+\cdots+x_{n-1}\alpha_{n-1}=\mathbf{0}。$$

又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，故$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_{n-1}=0$。所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta_1$线性无关。

例 36.3.3（难度系数 0.4）　设分块矩阵$A=\begin{pmatrix}P&R\\O&Q\end{pmatrix}$是正交矩阵，其中$P$、$Q$分别是$m$阶和$n$阶方阵。证明：$P$、$Q$是正交矩阵，且$R=O$。

解析：本题考查正交矩阵的概念，注意分块矩阵的运算。

证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}。$$

由此可得三个矩阵等式：$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$。

根据 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，可知 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$。根据 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{O}$，两边左乘 $\boldsymbol{P}$ 可得 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{O}$。

由 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$ 可推出 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵。

例 36.3.4（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个实 n 维行单位向量，令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，证明：$\boldsymbol{Q}$ 是一个对称的正交矩阵。

解析：先判断矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的对称性，再利用定义 36.1.2 证明 $\boldsymbol{Q}$ 是正交阵。遇到"$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$"时注意运用"乾坤大挪移"的技巧（参见例 9.3.2）。

证明：因为

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{Q}，$$

所以 $\boldsymbol{Q}$ 是对称阵。

又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+4(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\alpha}。\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=1$。因此

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}，$$

即 $\boldsymbol{Q}$ 是正交阵。

知识点 37　向量组的规范正交化、施密特正交化方法

更多资源请扫二维码：

37.1　概念、定理

1．概念

定义 37.1.1　规范正交基、基的规范正交化　设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是向量空间 V（$V\subset\mathbb{R}^n$）的一组基，如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是 V 的

一组规范正交基。设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量空间 V 的一组基，求 V 的一组规范正交基。这也就是要找一组两两正交的单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$，使 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 等价。求解这样一个问题的过程称为把基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 规范正交化。

2. 定理

定理 37.1.1　施密特正交化过程　设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量空间 V 中的一组基，取向量组

$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$，

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1,$$

……

$$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_2]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_{r-1}]}{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{b}_{r-1}]}\boldsymbol{b}_{r-1}。$$

容易验证 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 两两正交，且 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 等价。

然后把它们单位化，即取

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1,\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_r=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_r\|}\boldsymbol{b}_r,$$

它就是 V 的一组规范正交基。

37.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 36
- **综述**：从知识点 36 可知，正交向量组有一些很好的性质，规范正交基指的是一组正交单位向量组组成的基，此基也有很好的性质，因此有时有必要对一般的线性无关向量组进行“校正”，将其变成正交向量组，当然前提是“校正”前后向量组必须等价。向量组的正交化过程只介绍了一种方法，即施密特正交化过程。大家无须了解此方法的原理，只要会运用即可。注意“规范正交化”分为“正交化”与“单位化”两步。

37.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 36.3.1

例 37.3.1（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个向量组，

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基；

（2）用施密特正交化过程把它们化为一组规范正交基。

解析：正交的向量组一定线性无关，但线性无关的向量组不一定是正交的，用施密特正交化过程再单位化。

（1）**证明：** 易验证 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

（2）**解：** 下面对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 施行施密特正交化过程。

令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}_1]}{[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_1]}\boldsymbol{\gamma}_1=(0,1,2)-\frac{3}{3}(1,1,1)=(-1,0,1),$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}_1]}{[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_1]}\boldsymbol{\gamma}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}_2]}{[\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_2]}\boldsymbol{\gamma}_2$$

$$=(2,0,3)-\frac{5}{3}(1,1,1)-\frac{1}{2}(-1,0,1)=\frac{5}{6}(1,-2,1)。$$

然后对其单位化，得所求的规范正交基为

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}_1\|}\boldsymbol{\gamma}_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}_2\|}\boldsymbol{\gamma}_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}_3\|}\boldsymbol{\gamma}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)。$$

例 37.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 38）　设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵，3 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\-1\\-8\\3\end{pmatrix}$ 均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 解空间的一组规范正交基。

解析： 综合题。首先求解方程组，方程组的基础解系即为其解空间的基，再利用施密特正交化过程将基规范正交化。

解： 因为 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 2，所以 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 解空间的维数为 $n-R(\boldsymbol{B})=4-2=2$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}$ 线性无关且均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是解空间的一组基。

取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{5}{15}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{pmatrix},$$

再单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{39}}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 解空间的一组规范正交基。

例 37.3.3（难度系数 0.8） 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，求一个上三角矩阵 $\boldsymbol{S}$ 与正交矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{U}$。

解析： 设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$。易验证 3 个列向量组线性无关，所以可用施密特正交化过程在 $\mathbb{R}^3$ 中找到一组规范正交基 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$，使得 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=L(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，再将施密特正交化过程根据矩阵分块的乘法规则“组装”成矩阵的乘法式，就可以得到结论。

解： $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,1,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3)^{\mathrm T}$，对其施行施密特正交化过程及单位化如下：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)^{\mathrm T}=\frac{1}{\sqrt2}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,2)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac13(-2,1,2)^{\mathrm T}=\frac13\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\beta}_1-\frac23\boldsymbol{\beta}_2=-\frac83\boldsymbol{\alpha}_1-\frac23\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\frac13(1,4,-1)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{3\sqrt2}(1,4,-1)^{\mathrm T}=\frac{1}{\sqrt2}\boldsymbol{\beta}_3。$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&-\frac83\\0&1&-\frac23\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&-2&\frac13\\0&1&\frac43\\1&2&-\frac13\end{pmatrix},$$

则上面施密特正交化过程对应的矩阵为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，即 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$。

令 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&&\\&\frac13&\\&&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{APD}$。

令 $S=PD=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，因此得 $AS=BD$，

再令

$$U=BD=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}。$$

因为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一组规范正交基，所以 $U=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 为正交阵。因此得到所求的上三角矩阵 S 与正交矩阵 U，使得 $AS=U$。

招数 37.3.1　奇招：施密特正交化过程中隐藏的“秘密武器”。

向量组的施密特正交化过程表示成矩阵的形式即为矩阵右乘上三角阵，这一点很容易被忽略。而且上三角矩阵对角线上的元素均为 1。将向量组施密特正交化过程“变身”为矩阵乘法之后常常可以成为很有杀伤力的“秘密武器”。

知识点 38　向量空间（数一）

更多资源请扫二维码:

38.1　概念

定义 38.1.1　点空间　在几何中，“空间”通常是点的集合，即作为“空间”的元素是点，这样的空间叫做点空间。

定义 38.1.2　向量空间　设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合 V 为向量空间。

定义 38.1.3　子空间　设有向量空间 V_1 及 V_2，若 $V_1\subset V_2$，就称 V_1 是 V_2 的子空间。

定义 38.1.4　维数　设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r\in V$，且满足

（1）$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关；

（2）V 中任一向量都可由 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性表示。

那么，向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 就称为向量空间 V 的一组基，r 称为向量空间 V 的维数，记

$\dim V = r$，并称 V 为 r 维向量空间。

定义 38.1.5　坐标　设 V 为向量空间。如向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 为 V 的一组基，则 V 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以唯一表示为

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r \text{。}$$

数组 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 下的坐标。

38.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**1
- **最关联知识点：**知识点 39，知识点 40
- **综述：**向量空间的知识不是本课程的重点。向量空间与向量组的不同之处在于它有“结构”，即它关于向量的加法与数乘是封闭的。若将向量空间当作向量组，则它的基对应向量组的最大无关组，它的维数对应向量组的秩。注意向量空间是向量组，但向量组不一定是向量空间。本知识点只需了解关于它的一些基本概念：基、维数与坐标。

38.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 29.3.2，例 37.3.2

例 38.3.1（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,0,0)$，求：

（1）$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 与 $L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的维数；

（2）$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的维数；

（3）$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的维数。

解析：考查向量空间各种组合的维数的求法。（1）向量组生成的向量空间的维数等于该向量组的秩；（2）两组向量生成的向量空间的和，即为此两组向量合成的向量组生成的向量空间；（2）两个向量空间的交的求法最难，设出交集的元素后，可发现它实际上是求一个方程组的解空间。

解：下面用 $\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 表示 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 的维数。

（1）因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$。因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，所以 $\dim L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=2$。

（2）首先易得 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$。

因为 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_1$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关（证明略），所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的最大无关组，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的秩为 3，故

$$\dim\left[L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\right]=\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=3 \text{。}$$

（3）设 $\boldsymbol{\gamma}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，则存在 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$，使得

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=x_3\boldsymbol{\beta}_1+x_4\boldsymbol{\beta}_2 \text{，}$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2-x_3\boldsymbol{\beta}_1-x_4\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}。$$

由（2）可知此方程组系数阵的秩为 3，因此其基础解系只有 1 个解向量，故

$$\dim\left[L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\right]=1。$$

例 38.3.2（难度系数 0.6）　设 $V=\left\{\boldsymbol{x}\left|\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_3+x_4\\x_3-x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ x_3,x_4\in\mathbb{R}\right.\right\}\subset\mathbb{R}^4$，证明：$V$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间，并求 V 的维数及 V 的一组基。

解析：基础题型，考查向量空间的概念。

证明：显然 $V\subset\mathbb{R}^4$ 非空。任取

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_3+x_4\\x_3-x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_3+y_4\\y_3-y_4\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\in V,x_3,x_4,y_3,y_4\in\mathbb{R},$$

则

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x_3+x_4+y_3+y_4\\x_3-x_4+y_3-y_4\\x_3+y_3\\x_4+y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x_3+y_3)+(x_4+y_4)\\(x_3+y_3)-(x_4+y_4)\\x_3+y_3\\x_4+y_4\end{pmatrix}\in V。$$

对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\lambda\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\lambda x_3+\lambda x_4\\\lambda x_3-\lambda x_4\\\lambda x_3\\\lambda x_4\end{pmatrix}\in V$。因此 V 关于向量的加法和数乘运算均封闭，故 V 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

将 V 中的向量改写为

$$\boldsymbol{x}=x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}。$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&1&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，则 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V 的一组基，且 $\dim V=2$。

例 38.3.3（难度系数 0.4，跨知识点 27）　由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 V_1，由 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 V_2，试证 $V_1=V_2$。

解析：若将向量空间看做向量组，则它与其生成元是等价的，因此根据等价关系的传递性，只需要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价即可证明两个向量空间相等。这里利用矩阵初等行变换化行最简形法证明两个行向量组等价。

解：因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3&3\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}。$$

可见$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$有相同的行最简形，即知$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}$等价。从而$V_1=V_2$。

知识点 39　基变换与过渡矩阵（数一）

更多资源请扫二维码:

39.1　概念、结论

1．概念

定义 39.1.1　基、维数　在向量空间 V 中，如果存在 n 个元素$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，满足：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关；

（2）V 中任一元素$\boldsymbol{\alpha}$总可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示。

那么$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$就称为向量空间 V 的一组基，n 称为向量空间 V 的维数。只含一个零元素的向量空间没有基，规定它的维数为 0。

定义 39.1.2　基变换、过渡矩阵　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$及$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是 n 维向量空间 V 中的两组基，且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad\qquad\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}\tag{39.1}$$

把$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$这 n 个有序元素记作（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$），利用矩阵乘法的形式，式（39.1）可表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{21}&\cdots&p_{n1}\\p_{12}&p_{22}&\cdots&p_{n2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\p_{1n}&p_{2n}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},\tag{39.2}$$

或

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}。 \quad (39.3)$$

以式（39.2）、式（39.3）称为基变换公式，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵。

2．结论

结论 39.1.1　两组基之间的过渡矩阵可逆。

39.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 38，知识点 40
- **综述**：向量空间的基不是唯一的，在不同的基之下向量有不同的坐标。因此如何选择合适的基，使得向量在基下的表示尽可能简单，就显得非常重要。在研究向量在基变换下的坐标变换之前，必须搞清楚不同基之间的过渡矩阵，即用一个基表示另一个基的矩阵表示式。由此可见，矩阵也是解决向量空间问题的工具。

39.3　经典例题精解巧析

例 39.3.1（难度系数 0.4）　在 $\mathbb{R}^3$ 中取两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}。$$

则基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为（　）。

（A）$\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解析：设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{X}$ 相当于求矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$。又因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix}1&1&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，选（A）。

解：（A）。

招数 39.3.1　比招：对比基变换公式与线性变换公式理解矩阵的应用。

大家仔细观察基变换公式（39.2）、（39.3）与线性变换公式（12.1），是不是发现它们很相似呢？线性变换公式中的变量在这里换成了向量。由此可以得出两点启发：第一，基变换完全可用矩阵作为工具来解决；第二，从式（39.2）可见矩阵分块有着很强的“形式化”及“可移植”性，这点大家要在解题时慢慢体会。

例 39.3.2（难度系数 0.6）　在 $\mathbb{R}^4$ 中，求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_4=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标。

解析： 先分别确立已知的两个基与规范正交基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 的过渡矩阵，然后利用矩阵乘法式的变换求得过渡矩阵，最后利用所得的基变换式就可得到基变换下的坐标。

解： 设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$。由已知得

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&1&1&1\\0&2&2&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}。$$

故

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&1&1&1\\0&2&2&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}0&-2&-1&0\\1&-1&-1&1\\0&2&3&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}。$$

所以由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}0&-2&-1&0\\1&-1&-1&1\\0&2&3&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$。

因为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)\begin{pmatrix}0&-2&-1&0\\1&-1&-1&1\\0&2&3&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)\begin{pmatrix}0\\-2\\3\\2\end{pmatrix}。$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}0\\-2\\3\\2\end{pmatrix}$。

招数 39.3.2　妙招：利用规范正交基作为基与基之间的“过渡基”。

两组看起来不能直接关联的基，需要一组基作为“过渡基”。作为过渡的基最好选规范正交基，如例 39.3.2 的 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$，因为一般来说在规范正交基之下向量的表达式最简单。

知识点 40　基变换下的坐标变换（数一）

更多资源请扫二维码:

40.1　概念、定理

1．概念

定义 40.1.1　坐标　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是向量空间 V_n 的一组基。对于任一元素 $\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，总有且仅有一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 就称为元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标，并记作 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

2．定理

定理 40.1.1　设 V_n 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，在基

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$。若两组基满足关系式$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$，则有坐标变换公式$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，或$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 或 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$。

40.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 38，知识点 39
- **综述**：向量空间中某向量在同一组基下的坐标是唯一确定的，但是在不同的基下必有不同的坐标，因此有必要找出向量在基变换下的坐标变换式。找坐标变换式的过程可以视为矩阵乘法的一个精彩应用，只要清楚矩阵乘法按照矩阵分块的原理“组装”过程及其运算规律，就容易理解、记忆本概念，它和基变换的过渡矩阵关系密切。

40.3　经典例题精解巧析

例 40.3.1（难度系数 0.6）　设(x_1,x_2,x_3,x_4)是向量$\boldsymbol{\alpha}$在$\mathbb{R}^4$的基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,4,4)，\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,7,7)，\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,-3,-5,2)，\boldsymbol{\alpha}_4=(5,5,8,-3)$$

下的坐标，(y_1,y_2,y_3,y_4)是$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标，且

$$y_1=3x_1+5x_2，y_2=x_1+2x_2，y_3=2x_3-3x_4，y_4=-5x_3+8x_4。$$

（1）求由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的过渡矩阵；

（2）求基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$；

（3）求向量$\boldsymbol{\beta}=(1,-1,1,-1)$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标。

解析：注意矩阵的对应关系，要善于利用矩阵的乘法来求解。

解：（1）设由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$到$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{P} \tag{40.1}$$

下面求过渡矩阵$\boldsymbol{P}$。由题设有：

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}。 \tag{40.2}$$

由已知可得

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix},$$

因而得 $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$，对比式（40.2），可知 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}$ 即为所求的由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的过渡矩阵。

（2）由式（40.1）：$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{P}$，且由

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}。$$

故

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-3&5\\3&5&-3&5\\4&7&-5&8\\4&7&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}。$$

因此得

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1,1)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\beta}_4=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

（3）设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3+x_4\boldsymbol{\beta}_4$，得方程组

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

解之得 $\boldsymbol{x}=(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$。故 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标为 $(-1,1,-1,1)$。

例 40.3.2（难度系数 0.6）　设 $\mathbb{R}[x]_3$ 为实数域上的不超过 3 次的多项式的全体。作以下一一对应：

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}[x]_3\longrightarrow\mathbb{R}^4$$
$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\mapsto\quad\begin{pmatrix}a_3&a_2&a_1&a_0\end{pmatrix}$$

在此对应下，$\mathbb{R}[x]_3$ 可以作为一个向量空间。下面仍以上述多项式的形式表示向量。

取 $\mathbb{R}[x]_3$ 的两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x^3+2x^2-x,\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=x^3-x^2+x+1,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=-x^3+2x^2+x+1,\qquad \boldsymbol{\alpha}_4=-x^3-x^2+1。$$

及

$$\boldsymbol{\beta}_1=2x^3+x^2+1,\qquad \boldsymbol{\beta}_2=x^2+2x+2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=-2x^3+x^2+x+2,\qquad \boldsymbol{\beta}_4=x^3+3x^2+x+2。$$

求坐标变换公式。

解析：须先求基变换公式，需要一个“过渡基”：$1,x,x^2,x^3$，再求坐标变换公式。

解：将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示。

因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(x^3,x^2,x,1)\boldsymbol{A}, \tag{40.3}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(x^3,x^2,x,1)\boldsymbol{B}。 \tag{40.4}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}。$$

由式（40.3）得$(x^3,x^2,x,1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{A}^{-1}$，将其代入式（40.4）得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}。$$

即有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}。$$

设某向量在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3,x_4)$，而在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标为$(y_1,y_2,y_3,y_4)$，则坐标变换公式为$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$。

下面利用初等行变换计算$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$。

$$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&0&-2&1&1&1&-1&-1\\1&1&1&3&2&-1&2&-1\\0&2&1&1&-1&1&1&0\\1&2&2&2&0&1&1&1\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1&-1&1&-1\end{array}\right)$$

$$=(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}).$$

所以

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}。$$

坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}。$$

第 3 篇综合测试题

3.1（知识点 25、35，难度系数 0.4）　下列说法正确的是（　）。

（A）若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行，向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 一定平行

（B）长度为 0 的向量未必是零向量

（C）若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\|\boldsymbol{a}\|>\|\boldsymbol{b}\|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$

（D）不是所有的向量都可以单位化

3.2（知识点 26、42，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,t,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(t,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(4,t^2,-4)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示法不唯一，求 t 的值及 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的表示式。

3.3（知识点 26、44，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$，试讨论 a、b 为何值时，（　）。

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

3.4（知识点 27，难度系数 0.6）　已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a、b 的值。

3.5（知识点 27、43，难度系数 0.4）　求常数 a，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

3.6（知识点 27，难度系数 0.4）　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 m，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩也为 m。

3.7（知识点 28，难度系数 0.4）　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\,(n>1)$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_n$ 也线性无关。

3.8（知识点 28，难度系数 0.6）　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，但其中任意 3 个向量都线性无关，证明必存在一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$。

3.9（知识点 28，难度系数 0.6） 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，问：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示?

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示?

判断之后，证明你得出的结论。

3.10（知识点 28，难度系数 0.4） 设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1,\quad s\geqslant 2,$$

且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，试讨论向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的线性相关性。

3.11（知识点 29，难度系数 0.4） 证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（其中$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0},s\geqslant 2$）线性相关当且仅当至少有一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$（$1<i\leqslant s$）可被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$线性表示。

3.12（知识点 30，难度系数 0.2） 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,3,1,t+1)^{\mathrm{T}}$，则（　）。

（A）对任意$t\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均线性无关

（B）仅当$t=-3$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

（C）当$t=0$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关

（D）仅当$t\neq 0$且$t\neq -3$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

3.13（知识点 30，难度系数 0.8） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关的$m$维向量组，$\boldsymbol{\beta}$为任意一个$m$维向量，若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}$线性相关，证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\beta}$线性无关。

3.14（知识点 30，难度系数 0.4，2006 年考研数学一真题） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维列向量，$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，下列选项正确的是（　）。

（A）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

（B）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

（C）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

（D）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

3.15（知识点 30，难度系数 0.4） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$及$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$均为$n$维向量组，且$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_i$，$1\leqslant i\leqslant m$。证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关。

3.16（知识点 30、27，难度系数 0.6） 设n维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$线性无关，则$n$维列向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关的充分必要条件是（　）。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示

（B）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价

（D）矩阵$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)$与矩阵$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\right)$等价

3.17（知识点 31，难度系数 0.4） 设有 4 维向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$。

问：a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关?当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示。

3.18（知识点 31，难度系数 0.2）　设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3，且满足 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_5=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_4$，则向量组的一个最大无关组为（　）。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

3.19（知识点 31，难度系数 0.6）　设向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r_1，向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2，向量组 C：$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 的秩为 r_3，证明：$R_{A+B+C}\leqslant R_{A+B}+R_{B+C}-R_B$（记“$A+B$”为向量组 A 与向量组 B 组合成的向量组）。

3.20（知识点 32，难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则以下 4 个结论中正确的是（　）。

① $\boldsymbol{A}$ 左乘一个行满秩矩阵不改变其秩

② $\boldsymbol{A}$ 左乘一个列满秩矩阵不改变其秩

③ $\boldsymbol{A}$ 右乘一个行满秩矩阵不改变其秩

④ $\boldsymbol{A}$ 右乘一个列满秩矩阵不改变其秩

（A）①③　　（B）②③　　（C）①④　　（D）②④

3.21（知识点33，难度系数0.6）　已知向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(5,0,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,4,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,4,-5,9)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,3,-1,7)$，求此向量组的两个最大线性无关组，并验证它们等价。

3.22（知识点 33，难度系数 0.6）　（1）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\6\\6\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$ 的一个最大无关组；

（2）将其余向量用此最大无关组线性表示；

（3）将此最大无关组扩充为向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的一组基。

3.23（知识点 34，难度系数 0.6）　讨论向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m=\left(1,a_m,a_m^2,\cdots,a_m^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}$ 的线性相关性，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是互异的数。

3.24（知识点 34，难度系数 0.2）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量组，且 $R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=r$，则（　）。

（A）必有 $r<s$

（B）向量组中任意 r 个向量的部分组线性无关

（C）$s>r$ 时，向量组中任意大于 r 个向量的部分组线性相关

（D）$s>r$ 时，该向量组有若干个最大无关组

3.25（知识点 35，难度系数 0.2） 设向量$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$的长度依次为 2 和 3，那么向量$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$的内积$[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}]=$______。

3.26（知识点 35，难度系数 0.4） 已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(k,2,k,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\gamma}=(0,1,0,2)$，则一个与$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$都正交的单位向量为________。

3.27（知识点 35，难度系数 0.4） 已知下列命题：

①若$k\in\mathbb{R}$，且$k\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$k$=0 或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

②若$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

③若两个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，满足$\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|$，则$[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]$=0;

④若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$。

其中真命题的个数是（ ）。

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

3.28（知识点 36，难度系数 0.2） 如果实对称矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+6\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$是正交矩阵。

3.29（知识点 36、42，难度系数 0.4） 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$是实正交矩阵，且$a_{11}=1$，$\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解是________。

3.30（知识点 37，难度系数 0.2） 设$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则下列结论错误的是（ ）。

（A）$\boldsymbol{A}^*$必为正交阵 （B）$|\boldsymbol{A}|$必为 1

（C）$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ （D）$\boldsymbol{A}$的行（列）向量组是正交单位向量组

3.31（知识点 37，难度系数 0.6） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5$为 5 维向量空间$V$的一组规范正交基，且有$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_5$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$规范正交化。

3.32（知识点 37、41，难度系数 0.6） 在$\mathbb{R}^4$中，向量空间$\boldsymbol{W}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,2)，\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,2,4)，\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,-1,-2)。$$

（1）证明：与$\boldsymbol{W}$所有向量均正交的向量构成一个向量空间（记为$\boldsymbol{W}^{\perp}$）。

（2）求$\boldsymbol{W}^{\perp}$的一个规范正交基。

3.33（知识点 38，难度系数 0.2，2010 年考研数学一真题）

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，

若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为 2，则$a=$______。

3.34（知识点 38，难度系数 0.4） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为$s$个固定的$n$维向量，集合

$$V=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s \,\middle|\, \lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{R}，\lambda_1+\cdots+\lambda_s=0\right\},$$

试判断集合V是否为向量空间。若是，求其维数。

3.35（知识点 38，难度系数 0.4） 若有矩阵等式$\boldsymbol{B}$=$\boldsymbol{PA}$，其中$\boldsymbol{P}$为可逆矩阵，则下列结论正确的是（ ）。

（A）$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$有相同的列空间 （B）$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$有不同的行空间

（C）$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$有相同的行空间 （D）$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$的不同的列空间

注：矩阵的行（列）空间指矩阵行（列）向量组生成的向量空间。

3.36（知识点 39，难度系数 0.4） 设 3 维向量空间V的一组基为

$$I_1：\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1)，\boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1)，\boldsymbol{\eta}_3=(2,3,2)。$$

（1）对此基用施密特正交化变为基 I_2；

（2）求基 I_3：$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ 到基 I_2 的过渡矩阵。

3.37（知识点 39，难度系数 0.4，2009 年考研数学一真题）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为（　）。

（A）$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

3.38（知识点 40，难度系数 0.6）　设

（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$

是向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的两个不同的基。求由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$，并求向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$ 在基（Ⅰ）下的坐标。

3.39（知识点 40，难度系数 0.4）　设向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的两组基为

（Ⅰ）$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$，

（Ⅱ）$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4$。

（1）求由基（II）到基（Ⅰ）的过渡矩阵；

（2）求在基（I）和基（Ⅱ）下有相同坐标的全体向量。

第3篇综合测试题详解

3.1 解析： 考查向量及其相关的基本概念。特别要注意“零向量”这个“盲点”。

（A）令 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，并取 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 为任意两个不平行的非零向量。因为零向量与任意向量平行，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，故（A）错误；若向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$ 长度为零，则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量，（B）错误；（C）向量是既有大小，又有方向的量，不可以比较大小，故（C）错误；（D）因为零向量不可单位化，所以（D）正确。

解：（D）。

3.2 解析： 根据方程组与向量组的对应关系可知，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示法不唯一当且仅当方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，即

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3\text{。}$$

故通过矩阵的秩即可求解。

解：首先有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&t&4\\-1&t&1&t^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+r_3\\r_1-r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}0&2&t-2&8\\0&t-1&3&t^2-4\\1&-1&2&-4\end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示法不唯一，则 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，即有 $\dfrac{t-1}{2}=\dfrac{3}{t-2}=\dfrac{t^2-4}{8}$，解得 $t=4$。

当 $t=4$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，可得方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $(0,4,0)^{\mathrm{T}}+k(-3,-1,1)^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{\beta}=-3k\boldsymbol{\alpha}_1+(4-k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k 为任意常数。

3.3 解析： 类似例 26.3.2，使用招数 26.3.1. 本题可将 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示转化为求解含参数的非齐次线性方程组。可以利用行列式法，也可利用初等变换法。两种方法各有千秋，行列式法虽简单但有局限性，即系数矩阵必须是方阵，初等变换法使用范围最广泛。

解：此题可转化为求解方程组 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$，即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - (b+2)x_3 = 3, \\ -3ax_2 + (a+2b)x_3 = -3\text{。} \end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}\text{。}$$

（1）当 $a=0$ 时，若 b=0，则 $R(\boldsymbol{A})=1$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$；若 $b \neq 0$，则 $R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$。以上两种情形方程组均无解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

（2）当 $a \neq 0$，$a-b \neq 0$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$，方程组有唯一解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示。对增广阵作初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\dfrac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

故表示式为

$$\boldsymbol{\beta} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2\text{。}$$

（3）当 $a \neq 0$，$a-b=0$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，对增广阵作初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\dfrac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故表示式为 $\boldsymbol{\beta} = (1-\dfrac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1 + (\dfrac{1}{a}+k)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$，$k$ 为任意常数。

3.4 解析：这里提供两种方法。第一种完全根据行列式来解；第二种根据方程组结合行列式来解。

解：方法一：因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为它的一个最大线性无关组。

由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的秩，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 2 且线性相关。从而行列式

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 0\end{vmatrix}=3b-a=0,$$

即 $a=3b$。又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，因此

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1 & 3 & b\\2 & 0 & 1\\-3 & 1 & 0\end{vmatrix}=2b-10=0,$$

即 $b=5$。

于是 $a=15$，$b=5$。

方法二： 因 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\2 & 0 & 6\\-3 & 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$$

有解，对此方程组的增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & b\\2 & 0 & 6 & \vdots & 1\\-3 & 1 & -7 & \vdots & 0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3+3r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & b\\0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2b\\0 & 10 & 20 & \vdots & 3b\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+\frac{5}{3}r_2\\r_2\times\left(-\frac{1}{6}\right)}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & b\\0 & 1 & 2 & \vdots & \dfrac{2b-1}{6}\\0 & 0 & 0 & \vdots & \dfrac{5-b}{3}\end{pmatrix},$$

由非齐次线性方程组有解的充分必要条件可知 $\dfrac{5-b}{3}=0$，即 $b=5$。

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关及 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，而题设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 同秩，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，即

$$\left|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\right|=\begin{vmatrix}0 & a & 5\\1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

解得 $a=15$。

3.5 解析： 将向量组的线性表示转化为方程组解的情况的讨论，再讨论未知数的取值情况。

解： 因为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i\,(i=1,2,3)$$

无解，所以必有系数行列式

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\1 & a & 1\\a & 1 & 1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2=0,$$

解得 $a=1$ 或 $a=-2$。下面对 a 分情况讨论。

（1）当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，显然向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，但易见 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不成比例，即 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\geqslant 2$，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

（2）当 $a=-2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$，向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,-2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(-2,-2,4)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=(-2,-2,-2)^{\mathrm{T}},$$

因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-2&-2\\1&-2&1&1&-2&-2\\-2&1&1&-2&4&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-2&-2\\0&-3&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-6\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。又因为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&-6&0&0&0\\0&0&0&0&-3&3\end{pmatrix},$$

则 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2<3=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示。由此可见 $a=-2$ 不合题意，舍去。

综上所述，得 $a=1$。

3.6 解析：先试图证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，再根据等价的向量组必等秩可得结论。

证明：因为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的部分组，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示。又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示。综上可得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价。根据等价的向量组必等秩且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 m，可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩也为 m。

3.7 解析：常规题型。可将向量组线性无关的证明转化为判定齐次线性方程组只有零解。

证明：设存在一组数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得

$$\lambda_1(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+\lambda_n(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathbf{0}。$$

对上式变形，得

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\boldsymbol{\beta}-\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1-\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}。$$

因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\,(n>1)$，所以

$$(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_1+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}。$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0,\\ \lambda_1+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=0,\\ \qquad\cdots\\ \lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}=0\text{。}\end{cases}$$

方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0\text{。}$$

因此方程组仅有零解：$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，即 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关。

3.8 解析：此题类似例 28.3.4，可利用反证法。假设 k_1,k_2,k_3,k_4 中有一个为零，则可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中另外 3 个向量线性相关，与已知矛盾，从而得证。

证明：因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，所以存在一组不全为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，假设 $k_1=0$，则有 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，且由于 k_2,k_3,k_4 不全为零，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，这与题设矛盾，因此 $k_1\neq 0$。同理可证 $k_2\neq 0$，$k_3\neq 0$，$k_4\neq 0$。即证。

3.9 解析：综合题型。考查线性表示、线性相关与线性无关等概念之间的联系。

解：（1）有结论：$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。证明如下。

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

（2）有结论：$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示。证明如下：

反证法。设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，由（1）知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，这与题设矛盾。所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示。

3.10 解析：定义法，最后需要讨论 s 的取值情况。

解：设有一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$，使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_{s-1}\boldsymbol{\beta}_{s-1}+x_s\boldsymbol{\beta}_s=0\text{。}$$

将已知条件中 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的表达式代入上式并整理得

$$(x_1+x_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_{s-1}+x_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关得

$$\begin{cases} x_1 + \qquad + x_s = 0, \\ x_1 + x_2 \qquad = 0, \\ \qquad \cdots \\ x_{s-1} + x_s = 0\text{。} \end{cases}$$

其系数行列式为

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{s+1} = \begin{cases} 2, & s = 2n+1 \\ 0, & s = 2n \end{cases}\text{。}$$

故当 s 是偶数时，方程组仅有零解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$，此时 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关；当 s 是奇数时，方程组有非零解，此时 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关。

3.11 解析：考虑利用定义证明。

证明：必要性。若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$）线性相关，则存在一组不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}\text{。}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$ 且 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全为零，所以 s 个向量 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 必不全为零，不妨设 $k_i\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 中最后一个非零向量，此时自然有 $k_i \neq 0$ 且 $i > 1$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_i$（$1 < i \leqslant s$）可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示，必要性成立。

充分性。设有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$（$1 < i \leqslant s$）可被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示。即

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1},$$

故

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \boldsymbol{\alpha}_i + 0\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}\text{。}$$

因为 $-1 \neq 0$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，充分性成立。

3.12 解析：通过向量组对应矩阵的秩来判断线性相关性。

因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & t+1 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2 - 4r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 + r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & t-8 & 11 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & t-1 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3 \div (-7) \\ r_4 - r_3 \\ r_2 - (t-8)r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & t+3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 - r_4 \\ r_3 \div 3 \\ r_4 - tr_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 3$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且与 t 的取值无关。

解：（A）。

3.13 解析： 此题若直接根据线性无关的定义来证明，不便变换等式。若通过反证法可以设出两个线性相关的等式，在这两个等式之间进行变换显然方便多了，然后设法找到逻辑矛盾。此方法利用了招数 30.3.1，先设出等式再说。

证明： 反证法。设 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则有一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta})+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})+\cdots+\lambda_n(\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0},$$

整理得：

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}。\tag{3.13.1}$$

易见 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\neq 0$（否则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，与已知矛盾）。

根据 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，可知存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})+\cdots+k_n(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0},$$

整理得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+(k_1+\cdots+k_n)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}。\tag{3.13.2}$$

同理可得 $k_1+\cdots+k_n\neq 0$。令 $\dfrac{k_1+\cdots+k_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=c$，综合式（3.13.1）与式（3.13.2），得

$$(k_1+c\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+c\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_n+c\lambda_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}。$$

根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，得 $k_i=-c\lambda_i(i=1,\cdots,n)$，代入式（3.13.1）与（3.13.2）并整理，得 $\boldsymbol{\beta}=0$。此时根据已知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，与另一已知条件 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关矛盾。因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。

3.14 解析： 此题完全可以利用定义判断向量组的线性相关性。这里再介绍一种方法，即将之对应矩阵，利用矩阵的秩等于其列向量组的秩判断线性相关性。

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，则 $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{AB}$。所以，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，即其秩小于 s，根据矩阵的秩等于其列向量组的秩，可得 $R(\boldsymbol{B})<s$，从而 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})<s$，再根据矩阵的秩等于其列向量组的秩，可得向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 也线性相关，故应选（A）。

另外，据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，得 $R(\boldsymbol{B})=s$。据 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})$ 可知 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant s$，这说明 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 有可能线性相关，也可能线性无关。所以选项（C）与（D）不正确。

解：（A）。

3.15 解析： 此题可以用常规的方法证明，但这里将它作为综合题来看待，利用向量对应矩阵，然后再根据矩阵的秩等于其列向量组的秩来证明，可发现这样做非常简便。

证明： 不妨设已知条件中的向量组均为列向量组。

令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$，根据 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_i,\ 1\leqslant i\leqslant m$ 可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 依次作初等列变换 $c_2+c_1,c_3+c_2,\cdots,c_m+c_{m-1}$ 而得到。根据矩阵的

初等变换不改变矩阵的秩，可知 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，再根据矩阵的秩等于其列向量组的秩，可得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

3.16 解析：用排除法。考查两个向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 也不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不等价，故排除（A）、（B）、（C），选择（D）。

解：（D）。

3.17 解析：基础题。$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=0$，据此可求出 a，其余可参照例 31.3.1。

解：
$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$$
$$=(10+a)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^3(10+a)。$$

所以当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关。

（1）当 $a=0$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个最大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$。

（2）当 $a=-10$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个最大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$。

3.18 解析：采用排除法。根据 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_5=\mathbf{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关，排除（D）；根据 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_4$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 相关，根据“部分相关则整体相关”（定理 30.1.2（1）），排除（B）和（C），故选（A）。

解：（A）。

3.19 解析：运用招数 31.3.1 中“变量定数法”先确定向量组 B 的最大无关组，然后

分别“扩充”成 $A+B$ 及 $B+C$ 的最大无关组，最后将其合在一起讨论各个向量组的秩。此题向量组的组合复杂，其思路可简单概括为：数 $\to$ 量 $\to$ 数。

证明： 向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2，不妨设其最大无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$。

向量组 $A+B$ 中，以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 为基础，逐个加 A 中的向量：若增加的向量不能被原向量组线性表示，则加入原向量组，否则不加入，逐个验证后，必可得到含 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 的 $A+B$ 的最大无关组，不妨设为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t_1}$（$R_{A+B}=r_2+t_1$），可将其称为由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 扩充成的 $A+B$ 的最大无关组。同样，向量组 $B+C$ 中，以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 为基础，也可以将其“扩充”为 $B+C$ 的最大无关组，设为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t_2}$（$R_{B+C}=r_2+t_2$）。

记 D：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t_2}$。显然 $A+B+C$ 的向量能够被其部分组 D 线性表示，即 D 与 $A+B+C$ 等价，根据等价必等秩得 $R_{A+B+C}=R_D$。另外显然有 $R_D\leqslant r_2+t_1+t_2$，且因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t_1}$ 及 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t_2}$ 均为无关组 D 的部分组，所以它们都线性无关。另一方面，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t_1}$ 及 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t_2}$ 分别为 A 与 C 的部分组且线性无关，故 $t_1\leqslant r_1, t_2\leqslant r_3$。所以

$$R_{A+B+C}=R_D\leqslant r_2+t_1+t_2=R_{A+B}+R_{B+C}-R_B。$$

3.20 解析： 大家熟悉的结论是：矩阵乘满秩矩阵不改变其秩。此题的条件“放宽”了，那么可以利用矩阵秩的定义及分块，使它能用上前面的结论。

设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})=(\boldsymbol{c}_1\quad \boldsymbol{c}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{c}_m)$ 为一个 $r\times m$ 矩阵，且 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$。若 $\boldsymbol{C}$ 列满秩，则可找到 $\boldsymbol{C}$ 的一个 m 阶非零子式，设此子式对应的矩阵的可逆子块为 $\boldsymbol{C}_1=\left(\boldsymbol{c}_1^{(1)},\boldsymbol{c}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{c}_m^{(1)}\right)$，它的列向量是由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量“缩短”而成。根据矩阵的乘法规则可得 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1$，其中 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $\boldsymbol{B}$ 缩短了相应的行而成的矩阵。根据 $\boldsymbol{C}_1$ 可逆，得 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B}_1)$，又根据 $\boldsymbol{B}_1$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的子式，故 $R(\boldsymbol{B}_1)\leqslant R(\boldsymbol{B})$，因此 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$。最后根据矩阵乘法与秩的关系，易得 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$。因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，②正确。①显然错误，只需取 $\boldsymbol{C}$ 为一个 m 维行向量，由于行向量的秩为 1，所以 $\boldsymbol{CA}$ 的秩最多为 1，只要 $\boldsymbol{A}$ 的秩大于 1 即可得到矛盾。

同理，结论③正确，④错误。

解：（B）。

3.21 解析： 使用常规求最大无关组的方法。验证向量组的等价时无须另外作初等行变换，只要“借用”求最大无关组用过的初等行变换即可求出两个向量组相互的表示式。

解： 将已知条件中的行向量转置成列向量，然后组合成矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}})$，对其作初等行变换：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}-1&5&3&-2&1\\2&0&-1&4&3\\0&3&4&-5&-1\\4&1&-2&9&7\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+2r_1\\r_4+4r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&5&3&-2&1\\0&10&5&0&5\\0&3&4&-5&-1\\0&21&10&1&11\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_4-2r_2\\ r_2\times\frac{1}{5}}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&5&3&-2&1\\0&2&1&0&1\\0&3&4&-5&-1\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2\leftrightarrow r_4\\ r_3\leftrightarrow r_4}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&5&3&-2&1\\0&1&0&1&1\\0&2&1&0&1\\0&3&4&-5&-1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-2r_2\\ r_4-3r_2\\ r_4-4r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&5&3&-2&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1\times(-1)\\ r_1+3r_3\\ r_1+5r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

由此得到两个最大线性无关组：（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；（2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$。

下面验证向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价：根据上面的行变换式可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3，\ \boldsymbol{\alpha}_2=0\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3，\ \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3，$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4，\ \boldsymbol{\alpha}_2=0\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4，\ \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4\right)。$$

所以两个最大无关组等价。

3.22 解析：（1）、（2）的做法同例 33.3.3;（3）因为$\mathbb{R}^4$的基是 4 个线性无关的 4 维向量，故只需求出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的最大无关组，再加足向量，组成 4 个线性无关的向量即为所求。

解：（1）$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\3&0&6&3\\2&4&6&0\\3&-1&3&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-2r_1\\ r_4-3r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&-6&3&9\\0&0&4&4\\0&-7&0&7\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2\times\frac{1}{3}\\ r_3\times\frac{1}{7}}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&-2&1&3\\0&0&4&4\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2-2r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&0&1&1\\0&0&4&4\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3-4r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_4\\ r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\times(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以其一个最大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$。

（2）设有线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$，其增广阵为$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$。根据上面的初等变换式，可得$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$。

（3）因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2&3\\2&0&4&-1\\1&6&6&3\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&-6&0&-7\\0&3&4&0\end{pmatrix}\overset{r_3+\frac{1}{2}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&-6&0&-7\\0&0&4&-\dfrac{7}{2}\end{pmatrix},$$

所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&-6&0&-7\\0&0&4&-\dfrac{7}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=(0,0,0,1)$。$R\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right]=4$，所以加向量 $\boldsymbol{e}$ 后 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{e}$ 成为向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的一组基。

3.23 解析：此题需要分 $m>n$ 、$m=n$ 和 $m<n$ 三种情况讨论。注意向量组与矩阵的对应。

解：（1）当 $m>n$ 时，根据向量的维数小于向量的个数的向量组必线性相关，可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关。

（2）当 $m=n$ 时，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m|$ 是 m 阶范德蒙德行列式，又由 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 互异可得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$R(\boldsymbol{A})=m=n$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

（3）当 $m<n$ 时，取

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}=\left(1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{m-1}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)}=\left(1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^{m-1}\right)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{(1)}=\left(1,a_m,a_m^2,\cdots,a_m^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}。$$

因为 $\left|\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)},\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{(1)}\right|$ 是 m 阶范德蒙德行列式，且 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 互异，所以 $\left|\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)},\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{(1)}\right|\neq 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)},\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{(1)}$ 线性无关。再由线性无关的向量组加分量仍然线性无关的性质，可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

3.24 解析：考查最大无关组的概念。

（A）、（B）显然错误。根据概念，若 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$，说明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的最大无关组含 r 个向量，且其中任意 $r+1$ 个向量线性相关，而线性相关的向量组加向量仍然线性相关，选（C）。

（D）错误。反例：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。显然此时仅有一个线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$。

解：（C）。

3.25 解析：由内积的性质得 $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}]=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2-\|\boldsymbol{\beta}\|^2+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]-[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$。根据内积的对称性得 $[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$，因此 $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}]=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2-\|\boldsymbol{\beta}\|^2=4-9=-5$。

解：-5。

3.26 解析： 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$，解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，可发现其基础解系仅含一个向量，将其单位化即所求。

解： 根据 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&2\\k&2&k&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，将其单位化为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$。故与 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 都正交的单位向量为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1,0)$。

3.27 解析： ①若 $k\neq 0$，则等式 $k\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 两边分别乘以 k^{-1} 得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，正确；②显然错误；③根据 $[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]=\|\boldsymbol{a}\|^2+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]-\|\boldsymbol{b}\|^2=0$，正确；④当两个向量反向平行时不成立。

故①、③正确，②、④错误。

解：（C）。

3.28 解析： 要证明 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 是正交矩阵，只要证明 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}$ 即可。

证明： 由 $\boldsymbol{A}^2+6\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，得

$$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

即 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$。

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以

$$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+3\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}.$$

故 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 是正交矩阵。

3.29 解析： 考查非齐次线性方程组解的情形及解的求法。

因为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，故可逆，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解。因为正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列向量组均为单位正交向量组，且 $a_{11}=1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的形式为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，由此形式可得 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的唯一解。

解： $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$。

3.30 解析： 基础题型。考查正交矩阵的各种性质。根据正交阵的定义，有 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，两边作行列式运算即得 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$，因此（B）的结论错误，选（B）。

（C）、（D）显然正确。现在说明（A）为何正确：因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，且

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\pm\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 为正交矩阵。

解：（B）。

3.31 解析： 因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是抽象的向量，不便直接作正交化，故先求出 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5$ 下的坐标向量，再将坐标向量作施密特正交化过程即可。

解： 根据已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5$ 基下的坐标向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0,0,1),\ \boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0,1,0),\ \boldsymbol{\xi}_3=(2,1,1,0,0)。$$

下面对向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 作施密特正交化：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0,0,1),$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}_1]}{[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1]}\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,0,1,0)-\frac{1}{2}(1,0,0,0,1)=\left(\frac{1}{2},-1,0,1,-\frac{1}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{[\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\eta}_1]}{[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1]}\boldsymbol{\eta}_1-\frac{[\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\eta}_2]}{[\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2]}\boldsymbol{\eta}_2=(2,1,1,0,0)-\frac{2}{2}(1,0,0,0,1)=(1,1,1,0,-1)。$$

再对向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0,1),\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,0,2,-1),\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{2}(1,1,1,0,1),$$

即

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_5),\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_5),\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5)$$

为所求。

3.32 解析：（1）若一个向量与向量空间中的所有向量都正交当且仅当这个向量和向量空间的生成元正交，注意生成元无须线性无关。

（2）向量空间 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 的基即方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系；最后利用施密特正交化方法可得规范正交基。

（1）**证明：** 设与 $\boldsymbol{W}$ 所有向量均正交的向量组成的集合为 $\boldsymbol{W}^{\perp}$，因为与 $\boldsymbol{W}$ 所有向量均正交，等价于与 $\boldsymbol{W}$ 的生成元 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，因此 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 为齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的解空间。又因为齐次线性方程组的解空间为向量空间，所以 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 为向量空间。

（2）**解：** 先求 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 的基，即求齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&0&2&4\\2&0&-1&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系。因为

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&0&2&4\\2&0&-1&-2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&0&3&6\\0&0&-3&-6\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+r_2\\r_2\times\frac{1}{3}\\r_1-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

所以基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,0,0)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,-2,1)$，即 $\boldsymbol{W}^{\perp}=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$。

因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 已经正交，所以对其单位化即得 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 的一组规范正交基：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(0,1,0,0)，\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,-2,1)。$$

3.33 解析： 考查基本概念。由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2，即 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$。

解： 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2，可知 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$。因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+r_2\\r_4+2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&a-6\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $a=6$。

3.34 解析： 只需判断集合 V 是否非空且对加法和数乘运算封闭，即可判断出其是否为向量空间；而向量空间的维数可通过其一组基的元素个数得到。

解： 显然 V 非空。任取 $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s\in V$，$\boldsymbol{y}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_s\boldsymbol{\alpha}_s\in V$，$k\in\mathbb{R}$。则 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=0$，$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s=0$，且有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\lambda_1+\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2+\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_s+\mu_s)\boldsymbol{\alpha}_s,$$
$$k\boldsymbol{x}=k\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s。$$

因为

$$(\lambda_1+\mu_1)+(\lambda_2+\mu_2)+\cdots+(\lambda_s+\mu_s)=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s)+(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s)=0,$$
$$k\lambda_1+k\lambda_2+\cdots+k\lambda_s=k(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s)=0。$$

故 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ 且 $k\boldsymbol{x}\in V$，所以 V 是向量空间。

任取 $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s\in V$，则 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=0$，即 $\lambda_1=-\lambda_2-\cdots-\lambda_s$，从而

$$\boldsymbol{x}=\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\lambda_s(\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\alpha}_1)。$$

可见 $(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1),(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,(\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\alpha}_1)$ 可以表示 V 中的所有向量，所以只要取 $(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1),(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,(\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\alpha}_1)$ 的最大无关组即可构成 V 的一组基，故 V 的维数等于向量组 $(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1),(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,(\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\alpha}_1)$ 的秩。

3.35 解析： 利用下列结论判定：设 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，（1）若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价；（2）若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价。此题当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价，即 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的行空间，故选（C）。

解：（C）。

3.36 解析： 本题考查施密特正交化过程和过渡矩阵的求法。

解：（1）令 I_1：$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1)$，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\eta}_2-\frac{[\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1]}{[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1]}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(0,3,1)-\frac{2}{6}(2,1,-1)=\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\eta}_3-\frac{[\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1]}{[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1]}\boldsymbol{\varepsilon}_1-\frac{[\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2]}{[\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2]}\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,3,2)-\frac{5}{6}(2,1,-1)-\frac{\frac{28}{3}}{\frac{28}{3}}\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).$$

得 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$为所求。

（2）根据前面的步骤，有

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}}\right)=\left(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}2 & -\frac{2}{3} & 1\\ 1 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}。$$

得所求过渡阵为

$$\begin{pmatrix}2 & -\frac{2}{3} & 1\\ 1 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}。$$

3.37 解析： 由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{M}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}。$$

故由基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$。选（A）。

解：（A）。

3.38 解析：过渡矩阵的求法可用到招数 39.3.2，以规范正交基作为过渡，也可以直接通过求矩阵方程来求。求$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$在基（I）下的坐标，展开计算比较繁琐，可先求出$\boldsymbol{\beta}$在基（II）下的坐标，再利用过渡矩阵求在基（I）下的坐标。

解:设基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}。$$

所以$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$。

因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{pmatrix},$$

故由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=-4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3。\end{aligned}$$

即向量$\boldsymbol{\beta}$在基（I）下的坐标为$(-4,-2,2)^{\mathrm{T}}$。

3.39 解析：（1）直接利用基（Ⅰ）关于基（Ⅱ）的表示式，即可确定过渡矩阵；（2）直接代入坐标变换公式求解即可，其中涉及方程组的求解。

解：（1）依题有

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\boldsymbol{Q},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&1\end{pmatrix}。$$

则由基（Ⅱ）到基（Ⅰ）的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&1\end{pmatrix}$。

（2）设 $\boldsymbol{a}$ 在基（Ⅰ）和基（Ⅱ）下的坐标分别为(x_1,x_2,x_3,x_4)和(y_1,y_2,y_3,y_4)，若两坐标相同，则由坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

可得方程组

$$(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

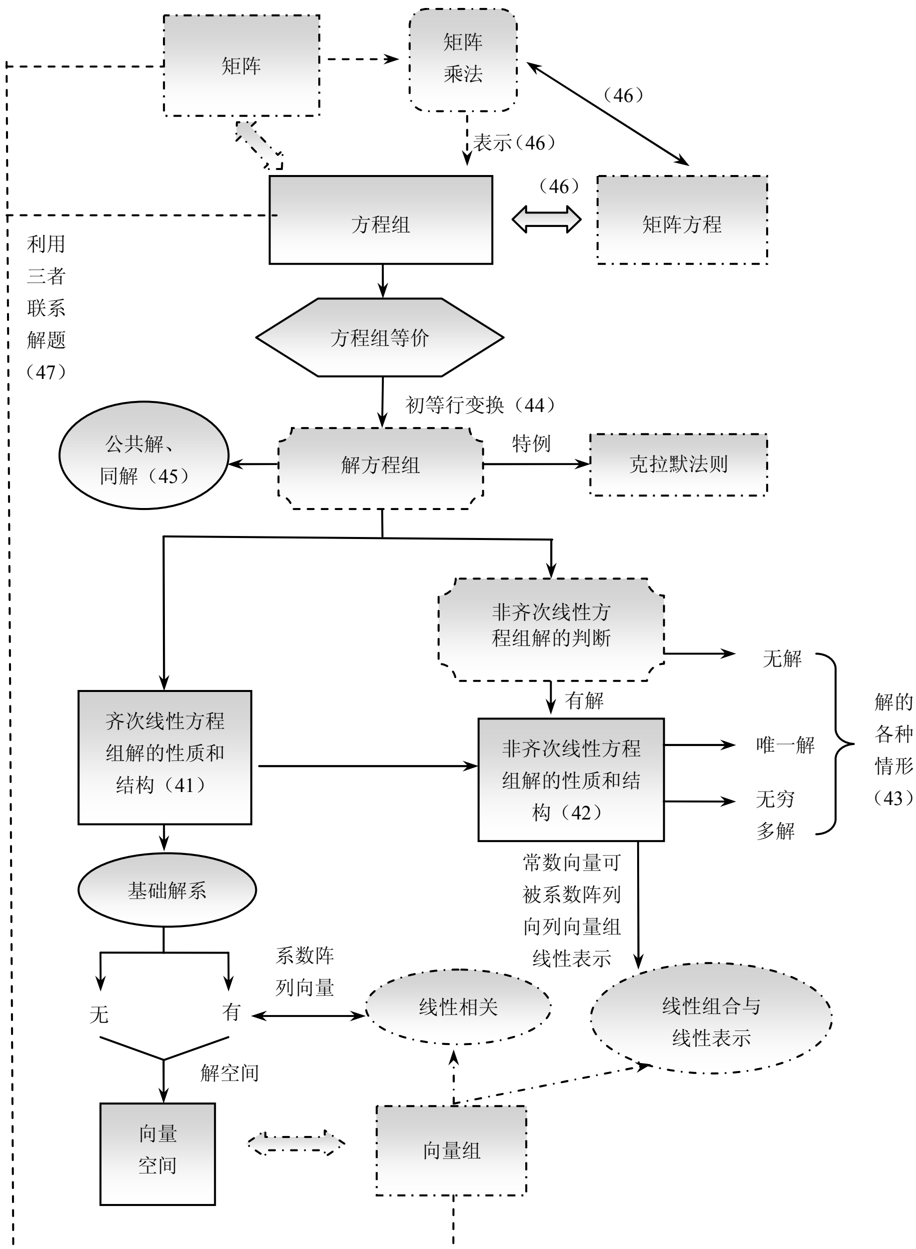
通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\k\end{pmatrix}，k\text{ 为任意常数。}$$

在基（I）和基（II）下有相同坐标的全体向量为$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{e}_4=k(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数。

第 4 篇　线性方程组

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

第 4 篇

综　述

求解线性方程组是线性代数课程中最主要的“问题”，常规的方法是通过方程组对应的矩阵，基于“等价”的思想，利用矩阵的初等行变换化行最简形来求解(44)，实际上就是用到了等价的方程组同解的结论(45)。记忆并掌握它们并不难，难点在于掌握线性方程组解的结构，以及线性方程组和矩阵、向量之间的联系并灵活运用它们来解题。在线性方程组中，先研究齐次线性方程组的解，它的所有解构成一个向量空间，称为解空间，其基称为基础解系，齐次线性方程组的所有解可以通过基础解系线性表示出来(41)；再研究非齐次线性方程组，其通解是在其对应齐次方程组通解的基础上加一个特解(42)，当然它还存在无解的情况(43)。

求解线性方程组的问题可以分解成以下三个小问题：第一是方程组中有无“多余”的方程？第二是若有“多余”方程，如何除去它们，保留所有“有用”的方程？第三是如何确定自由未知量？这三个小问题都要靠对应的矩阵与向量组来解决，它们可各自引出一些重要的结论，因此它们可以作为本课程的“总纲”。表面上看来，只要将方程组对应矩阵，即可用矩阵的初等行变换求出方程组的通解，但是向量组与方程组的联系却更为精彩：向量组线性无关对应齐次线性方程组仅有零解；一个向量可以被一个向量组线性表示对应非齐次线性方程组有解。这两个结论在综合题中常常用到。

至此，线性代数的“一个问题”与“两个工具”都已经“出场”了，由于它们之间有着千丝万缕的联系，尤其是矩阵等价、向量组等价、方程组等价之间的联系更为紧密（可参见 0.1 的框图），所以，利用这些联系来解综合题显得特别重要(47)。实际上，即使非综合题也常常利用它们之间的联系来解题，如利用矩阵的秩求向量组的秩，利用矩阵求向量组的最大无关组，等等。综合题虽然千变万化，但大都是通过矩阵的分块作为纽带，将矩阵、向量组与线性方程组联系起来解题。

从矩阵到矩阵方程要经过矩阵分块的反过程，即矩阵的“组装”；反之，矩阵方程可通过分块分解为若干个一般的方程组。虽然常见的矩阵方程在第 2 篇已经可以解决，但

是有的题目却需要利用矩阵、矩阵方程与矩阵乘法之间的联系来解题[46]，这在考研题中常常会涉及，因此将它作为一个单独的知识点来分析。

注：文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握，并根据自己的实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

更多资源请扫二维码:

知识点 41　齐次线性方程组解的性质及结构

更多资源请扫二维码:

41.1　概念、定理及性质

1．概念

定义 41.1.1　线性方程组的矩阵形式　n 个未知数、m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m。 \end{cases}$$

可以写成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,\cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2,\cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$。矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ 称为线性方程组的增广矩阵。

定义 41.1.2　基础解系　齐次线性方程组解空间的一组基称为该齐次线性方程组的基础解系。

2．定理

定理 41.1.1　设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$，则 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解向量组 S 的秩 $R_S=n-r$。即其基础解系含有 $n-r$ 个向量。

3．性质

性质 41.1.1　齐次线性方程组解的性质

（1）若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。

（2）若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，k 为实数，则 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。

41.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 42
- **综述**：因为齐次线性方程组解的性质 41.1.1 说明方程组的解关于向量的加法与数乘封闭，所以它的所有解恰好构成一个向量空间。正因为如此，线性方程组解空间的

向量可以通过其基（即基础解系）线性表示，其妙处在于利用有限个向量描述了无限个向量，并且基础解系的元素个数和系数矩阵的秩密切相关。齐次线性方程组的具体解法将在知识点 44 详述，这里仅从其结构理论上来选题。

41.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 36.3.2

例 41.3.1（难度系数 0.4）　给定齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=0。\end{cases}$

（1）当λ满足什么条件时，方程组的基础解系中只含有一个解向量?

（2）当$\lambda=1$时，求方程组的通解。

解析：基础题型，考查基础解系中向量的个数与系数矩阵的关系，参照定理 41.1.1。

解:（1）方程组的基础解系中只含有一个解向量的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})=4-1=3$。因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda-1&0&0\\0&0&\lambda-1&0\end{pmatrix},$$

再根据$R(\boldsymbol{A})=3$可求得$\lambda\neq1$，所以当$\lambda\neq1$时，方程组的基础解系只含有一个解向量。

（2）当$\lambda=1$时，根据$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得原方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

因此方程组的通解为$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+c_3\boldsymbol{\eta}_3$，其中$c_1$、$c_2$、$c_3$为任意常数。

例 41.3.2（难度系数 0.6）　设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$为齐次线性方程组。

（1）若$\boldsymbol{A}$的每行元素之和均为 0，且$R(\boldsymbol{A})=n-1$，求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解；

（2）若$R(\boldsymbol{A})=n-1$，且$|\boldsymbol{A}|$的代数余子式$A_{11}\neq0$，求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解。

解析：此题的关键是求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系。先根据定理 41.1.1 判断基础解系中解向量的个数，再根据题目的提示“构造”出解向量。此题的趣味就在于“构造”，前提是概念清晰，且概念之间须能快速地“切换”，如看到（2）中提及代数余子式，就要立即联想到行列式按行（列）的展开公式，由此公式又要联系到线性方程组。

解：（1）因为$R(\boldsymbol{A})=n-1$，即$n-R(\boldsymbol{A})=1$，所以方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系只含一个解向量。根据已知$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为 0，可得$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个解，故

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数。

（2）因为 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$。根据行列式按照行（列）展开定理（定理 4.1.1）得

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=|\boldsymbol{A}|=0, \tag{41.1}$$

$$a_{i1}A_{11}+a_{i2}A_{12}+\cdots+a_{in}A_{1n}=0(i=2,\cdots,n)。 \tag{41.2}$$

根据式(41.1)、式(41.2)及 $|\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式 $A_{11}\neq 0$，可知 $(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个非零解。因为 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系仅含一个解向量。故 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为 $k(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数。

例 41.3.3（难度系数 0.8）　各求一个齐次线性方程组，使其基础解系由下列向量组成：

（1）$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\5\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\2\\-2\end{pmatrix}$。

解析：根据已知线性方程组求基础解系是常规的题型，而利用基础解系求原线性方程组则是比较新颖的题型。这里提供两种方法：第一种方法是先构造方程组的通解，然后将任意常数转成未知量，如第（1）题；第二种方法是根据方程组与矩阵的对应关系构造出矩阵等式，将原方程组的系数作为未知量，然后转化成求解另一类方程组。如第（2）题，先构造出 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{O}$，最后将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量作为新的方程组

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

的解向量，从而解出方程组的系数阵。

解：（1）设所求齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系可知其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}，即\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k_1+3k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}。$$

只要令 $k_1=x_2$，$k_2=x_3$，就可得 $x_1+2x_2-3x_3=0$ 为所求。

（2）设所求齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，根据已知条件可构造矩阵等式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{O}$，转置得 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，因此 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中的列向量均为另一方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解。展开得

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_4-x_5=0,\\2x_1-3x_2+2x_3+5x_4-3x_5=0,\\x_1-2x_2+x_3+2x_4-2x_5=0。\end{cases}$$

下面解之，根据

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，将这两个向量转置后可组合成矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可作为原方程组的系数阵，故所求方程组为

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0。 \end{cases}$$

例 41.3.4（难度系数 0.4）　已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，则此方程组的基础解系也可以选用（　）。

（A）$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_4 + \boldsymbol{\eta}_1$

（B）$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4$

（C）$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 的等秩向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

（D）$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_4 - \boldsymbol{\eta}_1$

解析: 向量组要作为齐次线性方程组的基础解系，须满足以下三个条件:（1）它线性无关;（2）它是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解;（3）它包含的向量的个数等于未知量个数减去系数阵的秩。三个条件中最关键的是判断线性无关。此题一一验证太麻烦，一个简易的方法是利用向量组的等价。其前提是向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 已经是基础解系，可证与基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 等价的向量组必为方程组的基础解系。

（A）因为 $(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2) - (\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) + (\boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4) - (\boldsymbol{\eta}_4 + \boldsymbol{\eta}_1) = 0$，所以（A）中的向量组线性相关，不能作为基础解系;（D）同理;（C）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 虽与 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 等秩，但它们未必等价，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 未必全是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解；根据排除法，选（B）。事实上 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4$ 是与 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 等价的向量组，下面给予说明。

令矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4)$，$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4)$。因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可通过初等列变换 $c_4 - c_3, c_3 - c_2, c_2 - c_1$ 变为矩阵 $\boldsymbol{C}$，因此可知它们的列向量组可以相互线性表示，故它们等价。

解:（B）。

招数 41.3.1　奇招：利用矩阵的行（列）变换证明矩阵行（列）向量组的等价

例 41.3.4 中选项（B）的证明方法很奇特，为了证明两个列向量组等价，将它们分别对应矩阵，只要证明两个矩阵可以通过初等列变换互推即可。这是因为矩阵的初等列

变换对应列向量组的线性组合。同理，行向量组则对应行变换。这种方法虽好，但是适用范围小。特别要注意：这里的矩阵决不可同时作行变换和列变换。

例 41.3.5（难度系数 0.8，2011 年考研数学一真题）　设 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为（　　）。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解析：本题考查齐次线性方程组的基础解系，其中隐含不少概念。需要综合应用秩、伴随矩阵等方面的知识，灵活性很大。

由线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个解向量知 $R(\boldsymbol{A})=3$，又由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可得 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$（参见例 11.3.4），故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为 3。再据 $R(\boldsymbol{A})=3$ 可得 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。最后根据 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为最大无关组，选（D）。

解：（D）。

知识点 42　非齐次线性方程组解的性质及结构

更多资源请扫二维码：

42.1　性质、结论

1．性质

性质 42.1.1　非齐次线性方程组解的性质

（1）设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1$ 及 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_2$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\right)$ 的解，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为其对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。

（2）设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 仍是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解。

2. 结论

结论 42.1.1　非齐次线性方程组解的结构

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是其对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解形式为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},\ k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\text{为任意常数。}$$

42.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**4
- **最关联知识点：**知识点 41，知识点 43
- **综述：**非齐次线性方程组解的结构很简单，即在有解的情形下，其通解为自身的一个特解再加上其对应的齐次线性方程组（称为它的导出组）的通解。注意非齐次线性方程组解的性质与齐次线性方程组解的性质的不同之处。

42.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 53.3.4

例 42.3.1（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 和 $c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{x}_s$（$c_1,c_2,\cdots,c_s$ 为常数）均为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $c_1+c_2+\cdots+c_s=$______。

解析：基础题型。因为方程组的解向量代入方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 后必须使得等式成立，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{x}_s)&=c_1(\boldsymbol{Ax}_1)+c_2(\boldsymbol{Ax}_2)+\cdots+c_s(\boldsymbol{Ax}_s)\\&=(c_1+c_2+\cdots+c_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_s=1$。

解：1。

例 42.3.2（难度系数 0.6）　已知 $\boldsymbol{\xi}_1=(-9,1,2,11)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-5,13,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=(-7,-9,24,11)^{\mathrm{T}}$ 均为线性方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+7x_2+a_3x_3+x_4=d_1,\\3x_1+b_2x_2+2x_3+2x_4=d_2,\\9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\text{。}\end{cases}$$

的解向量，求此线性方程组的通解。

解析：此题的关键是通过方程组的部分解及系数阵的信息联合起来确定系数阵的秩，从而明确方程组解的结构，最后得出通解。注意此题无须求出方程组中未知常数的值。

解：因为线性方程组的系数阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&7&a_3&1\\3&b_2&2&2\\9&4&1&7\end{pmatrix}$ 中有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}2&2\\1&7\end{vmatrix}$ 不为零，

所以 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$。又根据性质 42.1.1（1）可得

$$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=(-10,6,-11,11)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3=(-2,10,-22,0)^{\mathrm{T}},$$

是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的线性无关的解，因此可得 $n-R(\boldsymbol{A})=4-R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，即 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，从而得 $R(\boldsymbol{A})=2$。

综上可得原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-9\\1\\2\\11\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-10\\6\\-11\\11\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\10\\-22\\0\end{pmatrix},\ k_1,k_2\text{为任意常数。}$$

例 42.3.3（难度系数 0.6） 设 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的 3 个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

解析：先根据系数矩阵的秩判定齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含向量的个数，再据性质 42.1.1（1）求出其基础解系，最后求出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

解：因为 $R(\boldsymbol{A})=3$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系由一个非零向量构成。

另一方面，记向量 $\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$，则

$$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{A}\left(2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3\right)=2\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2-\boldsymbol{A\eta}_3=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0}\text{。}$$

根据已知可计算得 $\boldsymbol{\xi}=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\xi}$ 就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系。根据非齐次线性方程组解的结构，得其通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_1=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\text{。}$$

注：由于有特解的缘故，非齐次线性方程组线性无关解的个数比对应的齐次线性方程组多一个，但是非齐次线性方程组的解集不能构成向量空间，这是它与齐次线性方程组不同之处。

例 42.3.4（难度系数 0.6，2010 年考研数学一真题） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\0 & \lambda-1 & 0\\1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解。

（1）求 λ、a；

（2）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

解析：考查非齐次线性方程组解的判断。若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，即它有无穷多解，则 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{A}$ 的列数=3，据此可先求出 λ 和 a，再用初等变换法解方程组

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。

解：（1）对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}\overset{r_1-\lambda r_3}{\sim}\begin{pmatrix}0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1+r_2\\ r_1\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 1+a-\lambda\end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，所以 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})<3$，可得 $\lambda=-1$，$a=-2$。

（2）当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，因为

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \dfrac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数。

知识点 43　非齐次线性方程组解的各种情形

更多资源请扫二维码：

43.1　定理

1．定理

定理 43.1.1　线性方程组解的判定定理　$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵。n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$：

（1）无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$；

（2）有唯一解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$；

（3）有无穷多解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$。

定理 43.1.2　n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<n$。

43.2　知识点及解题方法综述

● 知识点考频：5

● **最关联知识点：**知识点 42

● **综述：**此知识点与知识点 42 关联紧密。非齐次线性方程组有无解的情况，而齐次线性方程组必有解（至少它有零解）。通常有两种方法判定非齐次线性方程组无解，一是通过系数阵与增广阵的秩不相等来判断；二是通过常数向量不能被系数矩阵的列向量组线性表示来判断，而第二种方法容易被忽略。另外大家注意线性方程组的几何意义：一个三元线性方程组表示一张平面，而若干此类方程组成的线性方程组为各平面的交点或交线，此几何意义可与《高等数学》相结合得到一类综合题。

43.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 27.3.3，例 34.3.3，例 52.3.2

例 43.3.1（难度系数 0.4） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则下列结论错误的是（ ）。

（A）方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 （B）方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解

（C）对任意列向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解

（D）对任意列向量 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 必有唯一解

解析：若 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则 $R(\boldsymbol{A})=4$。下面只需判断系数矩阵和增广矩阵的秩，再结合定理 43.1.1 即可得答案。

（A）因为 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})=4$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，故（A）正确；（B）因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组（证明参见例 47.3.8），且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 5×5 矩阵，故 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=4<5$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解，故（B）正确；（C）因为增广阵 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ 仅 4 行，所以 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})=4$，即对任意 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解，故（C）正确；（D）因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 5×4 矩阵，有可能出现 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}>R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 的情况，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 可能无解，故（D）错误。

解：（D）。

例 43.3.2（难度系数 0.6） λ 取何值时，方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2。\end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解?当无穷多解时求出其通解。

解析：因为方程组中方程的个数等于未知量的个数，所以可先据克拉默法则求出方程组有唯一解时未知量的取值，然后再用初等变换讨论其他情况。

解：方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)。$$

易得

$$|\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\text{。}$$

下面分情况讨论：

（1）当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，根据克拉默法则，方程组有唯一解。

（2）当$\lambda=-2$时，有

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{array}\right)\overset{r_2\leftrightarrow r_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-2\\-2&1&1&1\\1&1&-2&4\end{array}\right)\underset{r_2+2r_1}{\overset{r_3-r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&3&-3&6\end{array}\right)\overset{r_3+r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&0&0&3\end{array}\right),$$

因为$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，所以方程组无解。

（3）当$\lambda=1$时，有

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

因为$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})<3$，所以方程组有无穷多解。其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_2-x_3+1,\\x_2=x_2,\\x_3=x_3\text{。}\end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\text{为任意常数。}$$

例43.3.3（难度系数0.8）　设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

证明：方程组$\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是方程组$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\1\end{pmatrix}$无解（其中$\boldsymbol{0}$是$n\times 1$矩阵）。

解析：此题综合性与技巧性均较强。证明必要性时，为了证明分块矩阵形式的方程组$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\1\end{pmatrix}$无解，可以将其拆解成$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(1)$两个方程组，只需证明这两个方程组不可能同时有解即可；证明充分性时，首先得到线性方程组$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\1\end{pmatrix}$系数阵与增广阵秩的关系，然后由矩阵秩的概念引出分块矩阵子块的秩必不大于原矩阵的秩的结论，经过几次转化后可得到结论。

证明：必要性。设方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 有解，且设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0$ 为其中一个解向量，则对满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量 $\boldsymbol{x}_0$，有 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0}=(0)$，从而有 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{pmatrix}$，即方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{pmatrix}$ 无解。

充分性。设方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{pmatrix}$ 无解，则

$$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}+1。$$

又因为 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\leqslant R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}+1=R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)+1=R(\boldsymbol{A})+1$，所以 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}+1\leqslant R(\boldsymbol{A})+1$，即 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\leqslant R(\boldsymbol{A})$。另一方面显然有 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\geqslant R(\boldsymbol{A})$，因此得 $R(\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$，从而方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 有解。

例 43.3.4（难度系数 0.4）　n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是（　）。

（A）导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解

（B）$\boldsymbol{A}$ 为方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

（C）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，且向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示

（D）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，且向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示

解析：非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})=n$。（A）为必要非充分条件，因为据条件仅能得出 $R(\boldsymbol{A})=n$，而不能得出 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=n$；（B）为充分非必要条件；（C）根据已知得 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行数，这只能说明方程组有解，要有唯一解需满足 $R(\boldsymbol{A})=n$，因此它不是充分条件；（D）根据已知得 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列数 $=n$，正确。

解：（D）。

例 43.3.5（难度系数 0.8，跨高等数学学科综合题，2003 年考研数学一真题）　已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1\text{：}\ ax+2by+3c=0；$$
$$l_2\text{：}\ bx+2cy+3a=0；$$
$$l_3\text{：}\ cx+2ay+3b=0。$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$。

解析：平面上的三条直线相交于一点，相当于对应 3 个方程组成的非齐次线性方程组有唯一解，此时系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2。本题将三条直线的位置关系转化为

方程组解的判定，而解的判定又可转化为矩阵秩的计算，最终转化为行列式的计算，综合考查了多个知识点。

证明：必要性。设三条直线l_1,l_2,l_3交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \tag{43.1}$$

有唯一解，故系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$与增广矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$的秩均为 2，于是$\left|\boldsymbol{B}\right|=0$。

因此有

$$\left|\boldsymbol{B}\right|=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=6(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0,$$

又根据三条直线不同可知$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故$a+b+c=0$。

充分性。由$a+b+c=0$，则从必要性的证明可知$\left|\boldsymbol{B}\right|=0$，故$R\left(\boldsymbol{B}\right)<3$。

依题意，方程组中的a、b不可能同时为零，所以

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-[a(a+b)+b^2]=-[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0,$$

故$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{B}\right)=2$，说明方程组（43.1）有唯一解，即三条直线$l_1,l_2,l_3$交于一点。

知识点 44　用初等行变换求解线性方程组

更多资源请扫二维码：

44.1　结论

结论 44.1.1　利用矩阵的初等行变换求解线性方程组

根据矩阵的初等行变换不改变方程组的解，可将方程组对应的矩阵化成行最简形，从而解出方程组。注意解方程组时不能用列变换。

44.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：4**

- **最关联知识点**：知识点 41，知识点 42，知识点 43
- **综述**：用矩阵的初等行变换求线性方程组的解是常规的方法，此方法是将方程组对应的系数矩阵或增广矩阵化成行最简形，它对应简化的同解方程组，此方程组的通解即为原方程组的通解。此方法的优点是无须了解线性方程组的结构，但建议大家还是要掌握方程组解的结构理论，以便对方程组部分的知识有更深刻的认识。另外，掌握方程组解的结构理论对理解向量、矩阵的相关概念与定理也很有帮助。

44.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 36.3.1，例 36.3.2

例 44.3.1（难度系数 0.4） a、b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + ax_4 = 0, \\ 3x_1 \quad\quad + ax_3 + 6x_4 = 18, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 + 13x_4 = b \text{。} \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？当有无穷多解时求出其通解。

解析：此方程组中方程的个数与未知量的个数相同，先利用 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{A}) = 4$，得到方程组有唯一解时 a 的取值情况，再分别讨论 a 的其他情况。

解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换：

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & a & 0 \\ 3 & 0 & a & 6 & 18 \\ 4 & -1 & 9 & 13 & b \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & a-4 & -12 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & b-24 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_4+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & a-4 & -12 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & b-36 \end{pmatrix}\text{。}$$

（1）当 $a \neq -1$ 且 $a \neq 6$ 时，$R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{A}) = 4$，方程组有唯一解。

（2）当 $a = 6$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & b-36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\text{。}$$

因此 $R(\boldsymbol{A}\ \ \beta) = R(\boldsymbol{A}) = 3 < 4$，方程组有无穷多解，继续化为行最简形

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&\dfrac{114-2b}{7}\\0&1&-1&0&\dfrac{-12-2b}{7}\\0&0&0&1&\dfrac{b-36}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

于是原方程组的通解为

$$(\frac{114-2b}{7},\frac{-12-2b}{7},0,\frac{b-36}{7})^{\mathrm{T}}+k(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}。$$

其中 k 为任意常数。

（3）当 $a=-1$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&6\\0&1&0&-5&-12\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&b-36\end{pmatrix},$$

下面进一步对 b 分情况讨论：

① 当 $b=36$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&6\\0&1&0&-5&-12\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

因此 $R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{A})=3<4$，方程组有无穷多解，其通解为 $(6,-12,0,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,5,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数。

② 当 $b\neq 36$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$，$R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})=4$，方程组无解。

注：关于方程组中自由未知量的选取，要注意各种“非典型”的形式。所谓非典型的形式，是指化成阶梯形后每一层阶梯的“长度”未必为一格。如例 44.3.1 中，当 a=6 时就是非典型的形式。实际上，行最简形的每一个阶梯的首非零元所在的列即对应非自由未知量，其余均对应自由未知量。

招数 44.3.1　妙招：用矩阵的初等行变换化行最简形求方程组的解。

在求解线性方程组的过程中，最好将系数矩阵或增广矩阵化成行最简形，之后即可直接得出原方程组通解的形式，无须继续对方程组作变换，而行阶梯形则需要继续作变换。

例 44.3.2（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，试求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

解析：本题的关键是 a 和 c 的确定，把 $\boldsymbol{\eta}$ 代入方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 即可求出 a 和 c 的一个

关系式。再根据 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，可最终确定 a 和 c 的值，进一步求出方程组的通解。

解： 将 $\boldsymbol{\eta}$ 的值代入方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中的第 3 个方程，得 $1-a+c-1=0$，即 $a=c$。因此

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\1&a&a&1&0\end{array}\right)\overset{r_3-\frac{1}{2}r_1}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&a-\frac{1}{2}&a-\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right).$$

（1）当 $a=c=\dfrac{1}{2}$ 时，矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 等价于

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&\frac{1}{2}&0\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，方程组基础解系所含解向量的个数为 $4-R(\boldsymbol{A})=2$。此时对应的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3+\dfrac{1}{2}x_4=0,\\x_2+3x_3+x_4=0。\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，得解向量 $(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}$；令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$，得解向量 $(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}}$。所以原方程组的通解为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）。

（2）当 $a=c\neq\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&a-\frac{1}{2}&a-\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right),\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}2&0&-2&1&-1\\0&1&3&1&1\\0&0&-2&-1&-1\end{array}\right),$$

于是可得 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，不符题意，舍去。

例 44.3.3（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$。

（1）求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；

（2）对（1）中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$、$\boldsymbol{\xi}_3$，证明向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关。

解析：（1）实际上就是求解两个非齐次线性方程组，用初等行变换；（2）判断 3 个 3 维向量的线性相关性，可用行列式法。

解：（1）根据 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_3,\\ x_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x_3,\\ x_3=x_3\text{。}\end{cases}$$

故所求 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数。

经计算得 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}$，因此

$$(\boldsymbol{A}^2\ \ \boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 0 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}-x_2,\\ x_2=x_2,\\ x_3=x_3\text{。}\end{cases}$$

故所求 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k_2、k_3 为任意常数。

（2）因为

$$\left|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\right|=\begin{vmatrix}-1 & -\frac{1}{2}+\frac{k_1}{2} & -\frac{1}{2}-k_2\\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{k_1}{2} & k_2\\ -2 & k_1 & k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -\frac{1}{2}+\frac{k_1}{2} & -\frac{1}{2}-k_2\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1+2k_2+k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以矩阵$\left(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\right)$满秩，对应列向量组$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$线性无关。

例 44.3.4（难度系数 0.2，跨知识点 12、15）　求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$的逆，并由此解线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}=(1,2,1,2)^{\mathrm{T}}$）。

解析：矩阵求逆的常规做法是利用矩阵的初等行变换，另外利用此方法也可求解一类特殊的线性方程组：当$\boldsymbol{A}$为n阶可逆矩阵时，求解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，可直接在方程组两端分别左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，得$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$。由于求矩阵的逆需要用初等变换，所以这也算一种“另类”的初等变换法。

解：先求矩阵的逆：

$$\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&0&0\\0&1&2&0&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-2&4&-8\\0&1&0&0&0&1&-2&4\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)。$$

所以得到

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&4&-8\\0&1&-2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}。$$

对方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两边左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，可得原方程组的解：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&-2&4&-8\\0&1&-2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\8\\-3\\2\end{pmatrix}。$$

知识点 45　线性方程组的公共解、同解

更多资源请扫二维码:

45.1　结论

结论 45.1.1　等价的线性方程组同解。

45.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 44
- **综述**：在考研中常常会遇到线性方程组的公共解与同解的题型。注意不要混淆二者的概念：两个方程组同解指的是它们的解集相同，即两个方程组等价；两个方程组有公共解指的是它们解集的交集非空。这里将其作为一个知识点是因为此类题型比单纯一个方程组的题型更复杂，也更具综合性。

45.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 34.3.2

例 45.3.1（难度系数 0.6）　已知两个齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解，求 a,b,c 。

解析：齐次线性方程组（II）中方程的个数小于未知量的个数，必有无穷多解。因为两个方程组同解，所以方程组（I）也有无穷多解，其系数行列式必等于零，据此可求 a 。求出（I）的解后代入（II）可继续求出 b、c 。

解：由于齐次线性方程组（II）中方程的个数小于未知量的个数，所以必有无穷多解。根据已知两个方程组同解，故方程组（I）也有无穷多解，于是其系数阵对应的行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=2-a=0 \text{，即 } a=2 \text{。}$$

此时方程组（I）的系数矩阵可作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

由此得方程组（I）的通解为$k(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$（k是任意常数），将$(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$代入方程组（II）得

$$\begin{cases}-1-b+c=0,\\-2-b^2+c+1=0。\end{cases}$$

解得$b=1$，$c=2$或$b=0$，$c=1$。

当$b=1$，$c=2$时，对方程组（II）的系数矩阵$\boldsymbol{B}$作初等行变换，得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}。$$

因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的行最简形，故方程组（I）、（II）同解，符合题意。

当$b=0$，$c=1$时，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，故方程组（I）、（II）不同解，不符合题意，舍去。

综上所述，当$a=2$，$b=1$，$c=2$时，方程组（I）与（II）同解。

例 45.3.2（难度系数 0.8）　设 4 元齐次线性方程组（I）为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0。\end{cases}$$

而已知另一个 4 元齐次线性方程组（II）的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}，$$

（1）求方程组（I）的一个基础解系；

（2）当a为何值时，方程组（I）与（II）有非零公共解？若有，请求出其所有解。

解析：（1）常规解法；（2）可设出公共解，则它可以分别用两个线性方程组的基础解系线性表示，据此可列出一个等式，将等式中的系数作为未知量，可得另一个齐次线性方程组，解之即可。

解：（1）对方程组（I）的系数阵作初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\2&3&-1&0\end{pmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&-3&2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1+2r_2\\r_2\times(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&3&-2\end{pmatrix}。$$

对应同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-5x_3+3x_4=0,\\x_2+3x_3-2x_4=0。\end{cases}$$

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，可得（I）的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}。$$

（2）设公共解为γ，则$\gamma = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$，从而$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 = 0$。现在求系数$k_1, k_2, l_1, l_2$，即求线性方程组$A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$，其中$A = (\beta_1, \beta_2, -\alpha_1, -\alpha_2)$。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 + 3r_1 \\ r_4 - 5r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3 - 2r_2 \\ r_4 + 3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 5a+5 & -3a-3 \end{pmatrix},$$

当 $a \neq -1$ 时，根据 $A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，可知 $R(A) = 4$，故方程组只有零解，不合题意，删去。

当$a = -1$时，根据$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，解得$k_1 = l_1 + 4l_2$，$k_2 = l_1 + 7l_2$，于是

$$\gamma = (l_1 + 4l_2)\beta_1 + (l_1 + 7l_2)\beta_2 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

所以$a = -1$时，（I）与（II）有非零公共解，其解为$l_1(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}} + l_2(-1,2,4,7)^{\mathrm{T}}$，$l_1, l_2$为任意实数。

例 45.3.3（难度系数 0.4，2003 年考研数学一真题）　设有齐次线性方程组$Ax = \mathbf{0}$和$Bx = \mathbf{0}$，其中A、B均为$m \times n$矩阵，现有 4 个命题：

① 若$Ax = \mathbf{0}$的解均是$Bx = \mathbf{0}$的解，则$R(A) \geqslant R(B)$；

② 若$R(A) \geqslant R(B)$，则$Ax = \mathbf{0}$的解均是$Bx = \mathbf{0}$的解；

③ 若$Ax = \mathbf{0}$与$Bx = \mathbf{0}$同解，则$R(A) = R(B)$；

④ 若$R(A) = R(B)$，则$Ax = \mathbf{0}$与$Bx = \mathbf{0}$同解。

以上命题中正确的是（　　）。

（A）①②　　　　（B）①③

（C）②④　　　　（D）③④

解析：先找容易判断的命题作为突破口。③④比较容易判断，判断后对照选项发现

①②无须判断便可得到答案。

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $n-R(\boldsymbol{A})=n-R(\boldsymbol{B})$，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，命题③成立，可排除（A）、（C）；反过来，若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则不能推出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，反例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$，但 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 显然不同解，所以命题④不成立，排除（D）。综合上述，正确的选项为（B）。

现在解释①②：对于①，因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的向量个数大于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的向量个数，即 $R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})$，①成立； ②与④同理，不成立，反例略。

解：（B）。

例 45.3.4（难度系数 0.6，2007 年考研数学一真题） 设方程组（I）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与方程组（II）$x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解。

解析：本题有两种解法。解法一：联立方程组（I）和（II），得到方程组（III），求出（III）的解即为两方程组的公共解，据此可判断出 a 的值。解法二：先判断其中一个方程组的解的状况，对 a 分情况代入另一个方程组，再判断是否有公共解。据此可求出 a 的值，最后求解方程组。

解：解法一。联立方程组（I）与（II），得方程组（III）

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases},$$

则（III）的解即为（I）与（II）的公共解。

因为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&1-a\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}。$$

所以方程组（III）有解当且仅当 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$。下面分情况讨论。

（1）当 $a=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时（III）的通解为 $k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$（k 为任意常数），上述通解即为（I）与（II）的公共解。

（2）当 $a=2$ 时，$\overline{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时方程组（III）有唯一解 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，它是方程组（I）与（II）的唯一公共解。

解法二。方程组（I）的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=(a-1)(a-2)。$$

（1）当 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$ 时，方程组（I）只有零解，但零向量显然不是方程组（II）的解，所以（I）与（II）只在 $a=1$ 或 $a=2$ 时才可能有公共解。

（2）当 $a=1$ 时，对方程组（I）的系数矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&4&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故（I）的通解为 $k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，k 为任意常数。将之代入方程组（II）可验证此解也是（II）的解，故当 $a=1$ 时，方程组（I）、（II）的公共解为 $k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，k 为任意常数。

（3）当 $a=2$ 时，对方程组（I）的系数矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&4&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

故（I）的通解为 $k(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，k 为任意常数。将 $x_1=0,x_2=-k,x_3=k$ 代入（II）得 $k=-1$。因此当 $a=2$ 时，方程组（I）、（II）的公共解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$。

例 45.3.5（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：$R\left(\boldsymbol{A}^{n+1}\right)=R\left(\boldsymbol{A}^{n}\right)$。

解析：此题可利用方程组的同解来证明。若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，则两者系数矩阵的秩相等。这不是常规判断矩阵秩的方法。

证明：考虑两个线性方程组

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{45.1}$$

$$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{45.2}$$

方程组（45.1）的解显然是方程组（45.2）的解。设 $\boldsymbol{x}_0$ 是式（45.2）的解，则 $\boldsymbol{x}_0$ 也是方程组（45.1）的解，否则有 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$。下面证明 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0$ 必线性无关。

设有 $k_0,k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{R}$，使得

$$k_0\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0+\cdots+k_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}。$$

上式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^n$ 得 $k_0\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$. 根据 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，可得 $k_0=0$，因此有

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0+\cdots+k_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}。$$

用类似的方法可得$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，因此$n+1$个n维向量$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0$线性无关，这与定理 30.1.2 相矛盾，因此方程组$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解必为$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解。

综上，$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解，所以$R\left(\boldsymbol{A}^{n+1}\right)=R\left(\boldsymbol{A}^n\right)$成立。

知识点 46　方程组、矩阵方程与矩阵的乘法运算的关系

更多资源请扫二维码:

46.1　结论

结论 46.1.1　方程组与矩阵方程

设有矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}$，则它可以拆解成$m$个线性方程组：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{b}_m$。反之，此$m$个线性方程组可组合成矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$。

结论 46.1.2　矩阵乘法与方程组

若有矩阵乘法式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$均为方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解。

46.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**4
- **最关联知识点：**知识点 47
- **综述：**方程组、矩阵方程与矩阵乘法有着密切的联系：方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$可以看成一个“扁”的矩阵方程；矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$又可以利用矩阵分块拆解成若干个线性方程组；方程组及矩阵方程均可表示为矩阵乘法式。解题时，要善于在三者之间自由地切换，利用它们的联系解决不同类型的题目。

46.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 26.3.1，例 26.3.2，例 26.3.3

例 46.3.1（难度系数 0.2）　$\boldsymbol{A}$为 3 阶非零矩阵，在非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$中，当$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$时，方程组有 3 个解$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$。

解析：已知方程组的解求系数矩阵，大家可以将之转化为矩阵方程。利用方程组的

解“组装”出矩阵方程的方法可见招数 46.3.2 中的“趣招”。

解：因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，所以

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\right)=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}。$$

招数 46.3.1　趣招：方程组与矩阵方程之间的“凌波微步”。

仔细观察方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 及矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，前者较“瘦”，后者较“胖”。实际上两者常常可以相互转化：

（1）矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 中，令 $\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\right)$，拆解开来就得到 n 个线性方程组：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{b}_i\,(i=1,\cdots,n)。$$

（2）方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 中，若 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为其 n 个解，令 $\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{b}\right)$（$n$ 列），则得到一个矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$。

这都是运用矩阵分块的原理进行“拆”与“装”的典型实例。若灵活运用，则可在方程组与矩阵方程之间作“凌波微步”，灵活地腾挪。

例 46.3.2（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，证明存在非零的 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})<n$。

解析：综合题，考查方程组的解和矩阵的秩的关系。注意将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 拆解成若干个方程组。要用到招数 46.3.2。

证明：必要性。设存在非零的 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$。若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，与已知条件 $\boldsymbol{B}$ 非零矛盾。故 $R(\boldsymbol{A})<n$。

充分性。设 $R(\boldsymbol{A})<n$，那么齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解。设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 为其一非零解。令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}$ 为所求。

招数 46.3.2　趣招：从线性方程组到矩阵乘法运算的“凌波微步”。

实际上，相比于线性方程组与矩阵方程，线性方程组与矩阵乘法运算的联系更紧密一些。如 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_s\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 可以作为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的若干解向量；反之由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的若干解向量也可“组装”成矩阵乘法的形式。

例 46.3.3（难度系数 0.6）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&-1&1\\3&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1&5\\-2&0&-4&3\\2&-2&1&3\\-1&4&-5&8\\0&1&-3&6\end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$。

解析： 因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 阶数较高且 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，所以直接求解不便。事实上可选取 $\boldsymbol{A}$ 的可逆子块，降低矩阵的阶数并可通过常规的矩阵求逆解方程，减小难度。

解：易见 $\boldsymbol{A}$ 列满秩。取其前 3 行 3 列构成可逆的子块 $\boldsymbol{A}_1$，根据矩阵乘法的概念，有 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1$，其中 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的前三行构成的矩阵。最后可得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&-1&5\\-2&0&-4&3\\2&-2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-2&1\\0&3&0&1\\2&1&1&4\end{pmatrix}。$$

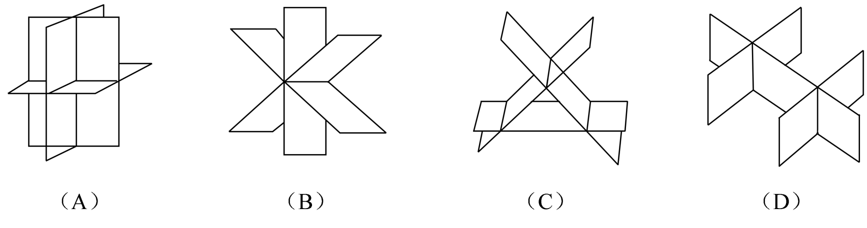
招数 46.3.3　奇招：矩阵方程的“庖丁解牛”式解法。

矩阵方程一般不用分块拆解，往往将它作为一个整体，借助矩阵的逆来求解，但是如例 46.3.3 中的矩阵不可逆，则可以利用矩阵分块的方法对矩阵进行“庖丁解牛”，即分出一个可逆的子块，其余部分剔除出去，之后仍然可以得到一个矩阵方程，这样并不会影响未知的 $\boldsymbol{X}$。此方法甚妙，关键是必须熟悉矩阵乘法的运算规则，其规则仍然可以用口诀“左行右列”来描述。

例 46.3.4（难度系数 0.6，2002 年考研数学一真题，跨高等数学学科知识点）　设有三张不同平面，其方程为

$$a_ix+b_iy+c_iz=d_i\ (i=1,2,3)。$$

它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为（　）。



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

解析： 此题考查线性方程组有解和无解的几何意义。注意 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示一张平面，其中 (A,B,C) 为平面的法向量。设三张平面的方程组成的线性方程组为

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}。$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，说明方程组有无穷多解，所以三张平面有公共交点且不唯一，即有一条交线，因此应选（B）。下面补充解释其他选项。

（A）中三张平面交于一点，表示方程组有唯一解，其充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$。

（C）中三张平面没有公共交点，表示方程组无解。又因为三张平面中任意两张都不平行，故 $R(\boldsymbol{A})=2$ 和 $R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，且 $\boldsymbol{A}$ 中任意两个行向量都线性无关。

类似地，（D）中有两张平面平行，三张平面没有公共交点，故 $R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，且 $\boldsymbol{A}$ 中有两个行向量线性相关。

解：（B）。

例 46.3.5 （难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$，求一个秩为 2 的 3 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

解析： 要求 3 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，只须求解齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$。其基础解系含有 2 个解向量，即可取到 2 个线性无关的解向量，另外再补充一个零向量，将 3 个向量按列组成矩阵即为所求的 $\boldsymbol{B}$。

解： 设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}_2\quad \boldsymbol{b}_3)$，其中 $\boldsymbol{b}_i\ (i=1,2,3)$ 为列向量。

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}_2\quad \boldsymbol{b}_3)=\boldsymbol{O}$ 可推出 $\boldsymbol{Ab}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$，即 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 3 个解。下面求解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$。

由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1=-x_2-2x_3, \\ x_2=x_2, \\ x_3=x_3。 \end{cases}$$

所以其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k_1,k_2\in\mathbb{R}。$$

令

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

则得

$$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\right)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}。$$

例 46.3.6（难度系数 0.6，2005 年考研数学二真题） 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c)，$a\neq 0$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解。

解析： 由条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可知 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量均为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，关键是要先对常数 k 分情况讨论，以确定 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量的个数。

解： 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，且 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$。

（1）若 $k\neq 9$，则 $R(\boldsymbol{B})=2$，又根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，可得 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$；根据已知条件 $a\neq 0$ 得 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，故 $R(\boldsymbol{A})=1$，此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含解向量的个数为 $3-R(\boldsymbol{A})=2$。矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1、3 列线性无关，可作为基础解系，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}，\ k_1,k_2\text{ 为任意常数。}$$

（2）若 $k=9$，则 $R(\boldsymbol{B})=1$，从而 $1\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$。

① 若 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含解向量的个数为 $3-R(\boldsymbol{A})=1$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$k_1$ 为任意常数。

② 若 $R(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为 $ax_1+bx_2+cx_3=0$。因为 $a\neq 0$，则其通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-\dfrac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\dfrac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数。

知识点 47　方程组、矩阵与向量之间的联系及其解题技巧举例

更多资源请扫二维码：

47.1　结论

结论 47.1.1　方程组与矩阵的联系

（1）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 对应系数阵 $\boldsymbol{A}$；

（2）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应一个系数阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个增广阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}\right)$。

结论 47.1.2　方程组与向量的联系

（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当向量 $\boldsymbol{b}$ 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，即 $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$；

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解当且仅当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；

（3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系中的解向量与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 正交。

结论 47.1.3　矩阵与向量的联系

矩阵对应一个行向量组与一个列向量组，且矩阵的秩与其行、列向量组的秩相等，即“三秩相等”。

47.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 24
- **综述**：本知识点是本课程中最具综合性的内容，同时也是重点和难点。考研的题型有个特点，就是要在有限的题目中尽量容纳更多的概念，因此知识点的综合不可避免。本课程的综合题相对于高等数学课程的综合题来说要单纯得多，其中相当一部分就在此知识点中，即利用方程组、矩阵与向量组之间的联系来解题，其中矩阵分块是联系三者之间的纽带。因此要想快速解综合题，必须先将矩阵分块研究透彻，然后熟练掌握其中的各种联系方法，最后通过典型的综合题将思维拓展开。其实许多学生做综合题不熟练，是因为他们没有往这方面考虑问题。

47.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 27.3.1

例 47.3.1（难度系数 0.6） $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n(m<n)$ 行满秩矩阵，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为 n 阶与 m 阶方阵，有结论：

① 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；　② 若 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$；

③ 若 $\boldsymbol{AB}$ 行满秩，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆；　④ 若 $\boldsymbol{CA}$ 行满秩，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆。

则以上结论正确的是（　）。

（A）①与③　（B）②与④　（C）①与④　（D）②与③

解析：①若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=n-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=n-m>0$，错；

②将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 行满秩，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 线性无关，将

$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$ 展开，再根据线性无关的定义，即可知②正确。

③$m=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}=\min\{m,n\}=m,R(\boldsymbol{B})=m<n$，$\boldsymbol{B}$ 不可逆，错；

④ $m=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{CA})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{C}),R(\boldsymbol{A})\}=\min\{R(\boldsymbol{C}),m\}=m$，因此 $R(\boldsymbol{C})=m$，$\boldsymbol{C}$ 可逆，正确。

解：（B）。

招数 47.3.1　妙招：矩阵以行（列）分块后转化为向量组来解题。

在矩阵的秩的相关证明题中，常常将矩阵根据要求作行或列的分块，这是因为矩阵的秩常常与向量组的秩有对应关系，同时又可以结合矩阵的分块的性质，几种方法相结合，可以达到奇妙的效果！如例 47.3.1。

例 47.3.2（难度系数 0.8）　设非齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2)^{\mathrm{T}},$$

求线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 的通解。

解析：此题必须从某非齐次线性方程组解的结构推导出另一非齐次线性方程组解的结构，综合性强。这需要将方程组利用矩阵按列分块“拆解”成向量的表达式，并且从方程组通解的信息得到对应向量组的线性相关性的信息。可利用结论 47.1.2（1）。

解：线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的等价形式为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$。因为其通解为 $(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，故

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}\text{。}\tag{47.1}$$

且根据 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 通解的结构得 $3-R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$，即 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$。

线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 的等价形式为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$。显然它有一个特解 $\left(1,0,2,0\right)^{\mathrm{T}}$，又根据上面证得的结论 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，可得 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=2$，故

$$4-R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=4-2=2。$$

由式（47.1）知，齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\left(1,2,-1,-1\right)^{\mathrm{T}}$，$\left(1,-1,2,0\right)^{\mathrm{T}}$。注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，否则若 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，说明 $\left(1,0,2\right)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，这与由已知条件得出的 $k(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解相矛盾，所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组，其通解为

$$\left(1,0,2,0\right)^{\mathrm{T}}+k_1\left(1,2,-1,-1\right)^{\mathrm{T}}+k_2\left(1,-1,2,0\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数。

招数 47.3.2　妙招：利用方程组与向量组的关系来解题。

在前面的章节已经讲到方程组与向量组之间的对应关系，因此某些方程组的问题可以通过联系向量组来求解。如例 47.3.2，从方程组的通解即给出了其列向量组的丰富的信息。

例 47.3.3（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组的一个基础解系。证明：

（1）$\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

（2）$\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$ 线性无关。

解析：用定义证明线性无关。注意结合齐次和非齐次线性方程组解的结构特点。

证明：（1）假设有一组实数 $k,k_1,\cdots,k_{n-r}$ 使得

$$k\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\boldsymbol{0}$$

成立，等式两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})=\boldsymbol{0},$$

即

$$k\boldsymbol{A\eta}^*+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}。$$

因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{0}\quad(i=1,2,\cdots,n-r)$，代入上式即得 $k\boldsymbol{A\eta}^*=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{A\eta}^*=\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k=0$。

又由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，所以

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

当且仅当 $k_i=0(i=1,2,\cdots,n-r)$。所以 $\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关。

（2）设有一组实数 $k,k_1,\cdots,k_{n-r}$，使得

$$k\boldsymbol{\eta}^*+k_1(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r})=\boldsymbol{0}$$

成立，整理得

$$(k+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\boldsymbol{0}。$$

由(1)可知，$\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，所以 $k_i=0\ (i=1,2,\cdots,n-r)$，且 $k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，立即可得 $k=0$，所以 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$ 线性无关。

例 47.3.4（难度系数 0.6） 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a、b 的值。

解析：本题提供两种做法：（1）先判断不含参数的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩，发现它线性相关，然后通过对应行列式为零判断 a、b 的值；（2）向量组线性表示与方程组有解对应，即利用结论 47.1.2（1），通过解方程组判断 a、b 的值。

解：**方法一**。因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且由已知易得 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为它的一个最大线性无关组。

由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的秩，且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a=0,$$

即 $a=3b$。又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且根据上证 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，从而 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

因此

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=2b-10=0,$$

即 $b=5$，于是得 $a=15$，$b=5$。

方法二。因 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$$

有解，对其增广矩阵施行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&9&b\\0&1&2&\dfrac{2b-1}{6}\\0&0&0&\dfrac{3b}{10}-\dfrac{2b-1}{6}\end{array}\right)。$$

由非齐次线性方程组有解的充分必要条件可知$\dfrac{3b}{10}-\dfrac{2b-1}{6}=0$，解得$b=5$。

又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的秩为 2，而题设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$同秩，从而有

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}0 & a & 5\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0。$$

由此解得$a=15$。

例 47.3.5（难度系数 0.4，2004 年考研数学二真题）　设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$的任意两个非零矩阵，则必有（　）。

（A）$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关

（B）$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关

（C）$\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关

（D）$\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关

解析：本题考查齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解的充分必要条件：$R(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{A}$的列数。

设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵。因为$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$的任意两个非零矩阵，故方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，即$R(\boldsymbol{A})<n$，$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关。对$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$的两边矩阵取转置得，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，所以方程组$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$也有非零解，即$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})<n$，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关。（A）正确。

解：（A）。

例 47.3.6（难度系数 0.8）　设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$为 4 阶矩阵，若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为（　）。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解析：此题虽然为选择题，综合性却特别强，体现了向量组与方程组的联系，涉及许多概念与结论，如齐次线性方程组解的结构、伴随矩阵的性质等。特别要记住以下结论：若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$n-1$，则$\boldsymbol{A}^*$的秩为 1（证明参见例 11.3.4）。

已知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系只有一个解向量$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，因此$4-R(\boldsymbol{A})=1$，即$R(\boldsymbol{A})=3$，故$R(\boldsymbol{A}^*)=1$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系含 3 个向量。

由$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$可知，$\boldsymbol{A}$的列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$都是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解。又由已知$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系得$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_3$，因此

$$R(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{A})=3,$$

即$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关。综上可知，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系。选择（D）。

解：（D）。

例 47.3.7（难度系数 0.6）　设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{47.1}$$

有解，并且添加一个方程

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = b$$

于方程组(47.1)中，所得到的新方程组与原方程组(47.1)同解。试证向量$\boldsymbol{\beta} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示。其中$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i = 1, 2, \cdots, m$。

解析：因为同解方程组可取到相同的基础解系，所以系数矩阵的秩必相同，据此可以推出其行向量组之间的线性关系。

证明：设新方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = b。 \end{cases} \tag{47.2}$$

式（47.1）与式（47.2）的系数矩阵分别记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix},$$

因为方程组（47.2）与（47.1）有相同的解，不妨设它们的通解为$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\xi}_s$，$k_1, k_2, \cdots, k_s$为任意常数。则（47.2）与（47.1）两个非齐次线性方程组对应的齐次线性方程组有相同的基础解系$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$，基础解系中解向量的个数同为$s$。于是可知系数矩阵$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$有相同的秩，即$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = r = n - s \leqslant \min(n, m)$。如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$的一个最大线性无关组是$\boldsymbol{\alpha}_{j1}, \boldsymbol{\alpha}_{j2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr}$，显然它也是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$的一个最大线性无关组，因此$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_{j1}, \boldsymbol{\alpha}_{j2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr}$线性表示，当然它也可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示。

例 47.3.8（难度系数 0.8）　设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，证明：$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A})$。

解析：利用矩阵与方程组之间的联系，将矩阵对应某齐次线性方程组的系数矩阵，再利用同解方程的系数阵的秩相等即可证明。

证明：设$\boldsymbol{x}_1$是方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的解，即$\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}_1) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{x}_1$也是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的解。

设$\boldsymbol{x}_2$是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的解，即$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{0}$。等式两边同时左乘$\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}$得$\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{0}$，所以$(\boldsymbol{Ax}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}_2) = \boldsymbol{0}$，故$\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{x}_2$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的解。

综上可知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解，即它们的解空间相同。根据齐次线性方程组解的结构定理可得 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$，用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 代替 $\boldsymbol{A}$ 即得：

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R\left[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right]=R(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})\text{。}$$

招数 47.3.3　奇招：用方程组解决矩阵的问题。

一般情况下，大家比较容易想到用矩阵解决方程组的问题，但是不容易想到有时候用方程组也能解决矩阵的问题。如例 47.3.8，将矩阵对应成方程组后，发现证明的过程并不复杂，只是这种做法较少见，不易想到罢了。此题若用矩阵的相似对角化也能证明出来，只是过程比用方程组来证明复杂得多。

第 4 篇综合测试题

4.1（知识点 41，难度系数 0.2）　已知 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解，k 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　）。

（A）$k\boldsymbol{\alpha}_1$　　（B）$k\boldsymbol{\alpha}_2$　　（C）$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　　（D）$k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

4.2（知识点 41，难度系数 0.4）　已知 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一列都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

的解。

（1）求 λ 的值；

（2）证明：$|\boldsymbol{B}|=0$。

4.3（知识点 41，难度系数 0.6，2001 年考研数学一真题）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中 t_1、t_2 为实常数，试问当 t_1、t_2 满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

4.4（知识点 41，难度系数 0.6）　求一个齐次线性方程组，它有如下解：

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}。$$

4.5（知识点 42，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 5×4 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的 3 个不同的解，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,6,8)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

4.6（知识点 42，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$、$\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解，k_1、k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为（　）。

（A）$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$　　（B）$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

（C）$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$　　（D）$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

4.7（知识点 43、27、28，难度系数 0.2）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

有无穷多解的充分必要条件是（　）。

（A）向量 $\boldsymbol{b}$ 能被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性相关的列向量组线性表示

（B）向量 $\boldsymbol{b}$ 能被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性相关的行向量组线性表示

（C）向量 $\boldsymbol{b}$ 能被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的列向量组线性表示

（D）向量 $\boldsymbol{b}$ 能被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的行向量组线性表示

4.8（知识点 43，难度系数 0.6）　线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\lambda-1 \\ 2x_2-x_3=\lambda-2 \\ x_3=\lambda-4 \\ (\lambda-1)x_3=-(\lambda-3)(\lambda-1) \end{cases}$ 有唯一解的充分条件是 $\lambda=$（　）。

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4.9（知识点 43、5，难度系数 0.8，2008 年考研数学一真题）　设 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（1）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

（2）当 a 为何值时，该方程组有唯一解？并求 x_1；

（3）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解？并求其通解。

4.10（知识点 44，难度系数 0.6，2006 年考研数学二真题）　已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1。 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解。

（1）证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$；

（2）求 a、b 的值及方程组的通解。

4.11（知识点 44，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，求解 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$。

4.12（知识点 45，难度系数 0.4）　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&5&-2\\2&0&3&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$。

（1）若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，求 t 的值。

（2）在（1）所确定的 t 下，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中一个满足 $x_3=x_4=0$ 的特解。

4.13（知识点 45，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，证明：$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$ 当且仅当齐次线性方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解。

4.14（知识点 45，难度系数 0.4）　设方程组（I）为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，又知齐次线性方程组（II）的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$。

（1）求方程组（I）的基础解系；

（2）方程组（I）和（II）是否有非零公共解?若有，则求出所有非零公共解。

4.15（知识点 46，难度系数 0.6）　齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$。若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则（　　）。

（A）$\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　（B）$\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

（C）$\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　（D）$\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

4.16（知识点 46，跨高等数学学科综合题，难度系数 0.6）　设有 n 张平面

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

且设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\A_n&B_n&C_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1&D_1\\A_2&B_2&C_2&D_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\A_n&B_n&C_n&D_n\end{pmatrix}。$$

证明：这 n 张平面过同一条直线的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})<3$。

4.17（知识点 47，难度系数 0.4）　设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}，$$

问 a、b 取何值时：

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?并写出此表示式。

4.18（知识点 47，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1&2\\2&a+1&2a&3a+1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$，且存在 3 阶非零方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$。求 a。

4.19（知识点 47，难度系数 0.6）　设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_4$，若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解。

4.20（知识点 47，难度系数 0.8）　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系，$\boldsymbol{B}$ 为 r 阶非奇异矩阵。证明：$\boldsymbol{AB}$ 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组的一个基础解系。

4.21（知识点 47，难度系数 0.8）　试用方程组证明例 24.3.1，即设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 可逆。

4.22（知识点 47，难度系数 1.0）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $A_{11}\neq 0$（A_{11} 为 $\boldsymbol{A}^*$ 中第一行第一列的元素），证明：线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 有无穷多解当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

第 4 篇综合测试题详解

4.1 解析：本题考查方程组的通解与基础解系及系数矩阵的秩的关系。

因为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含的向量个数为 $n-R(\boldsymbol{A})=n-(n-1)=1$，且基础解系不能含零向量，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 均可能为零向量，所以（A）、（B）、（C）均不能选；由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 一定不为零向量，根据齐次方程组解的性质，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解。选（D）。

解：（D）。

4.2 解析：（1）本题考查齐次线性方程组有非零解的充要条件。（2）根据题目条件可得对应的矩阵等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且据此可以判断出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩。

（1）**解**：因为非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一列都是题目中齐次线性方程组的解，所以原方程组有非零解，从而 $\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$。解得 $\lambda=1$。

（2）**证明**：令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$，依题意可得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，因此有 $R(\boldsymbol{B})+R(\boldsymbol{A})\leqslant 3$。易求得 $R\left(\boldsymbol{A}\right)=2$，所以 $R(\boldsymbol{B})\leqslant 1<3$，故 $\boldsymbol{B}$ 不可逆，即 $\left|\boldsymbol{B}\right|=0$。

4.3 解析：注意齐次线性方程组的解构成解空间，因此其不同的基础解系等价。由于齐次线性方程组解的线性组合仍然为该方程组的解，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，且其数目与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的数目相同。要使其成为基础解系，只需要满足线性无关即可。由此可以确定 t_1、t_2 需要满足的关系式。

解：由于齐次线性方程组解的线性组合仍然为该方程组的解，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 s 个解。要使其成为基础解系，它必须线性无关。

设存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}$，即

$$k_1(t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_s(t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}。$$

整理得 $(t_1k_1+t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(t_2k_1+t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$。由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，所以

$$t_1k_1+t_2k_s=0,t_2k_1+t_1k_2=0,\cdots,t_2k_{s-1}+t_1k_s=0。$$

这是一个 s 元齐次线性方程组（$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为未知量），其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & & & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^{\ s} + (-1)^{s+1} t_2^{\ s} \text{。}$$

所以当 $t_1^{\ s} + (-1)^{s+1} t_2^{\ s} \neq 0$ 时，上述方程组只有零解，即 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关，此时它构成原方程组的基础解系。

4.4 解析： 先根据已知 3 个解向量的秩及最大无关组的信息设出所求方程组的系数矩阵，列出对应的方程组后对矩阵取转置变成求另一方程组，最终确定原方程组的系数阵。此方法与例 41.3.3 类似。

解：因为

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{。}$$

所以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 线性无关，故原方程组的基础解系至少含有两个解向量，不妨设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 即为其基础解系。又因为它们均为 4 维向量，所以原齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应为 4 列，其秩为 2，故可令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

使得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{O} \text{。}$$

记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$，得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，对两边矩阵取转置得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解，对矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

于是得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

其中 c_1、c_2 为任意常数。故

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{。}$$

则所求齐次线性方程组为

$$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=0,\\-x_1-x_2+2x_4=0。\end{cases}$$

4.5 解析：关键是仿照非齐次线性方程组解的性质的证明方法，用矩阵的乘法运算分别算出原非齐次线性方程组及对应齐次线性方程组的一个解，最后根据非齐次线性方程组解的构造得到通解。

解：因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个不同的解，所以 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{b}(i=1,2,3)$，可得

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{b} \text{ 及 } \boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{4}(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{b},$$

即

$$\frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(\frac{1}{2},0,0,0)^{\mathrm{T}},\ \frac{1}{4}(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2)^{\mathrm{T}}$$

均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，且它们的差 $(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2)^{\mathrm{T}}-(\frac{1}{2},0,0,0)^{\mathrm{T}}=(0,1,\frac{3}{2},2)^{\mathrm{T}}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个特解，又 $n-R(\boldsymbol{A})=4-3=1$，因此可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $(\frac{1}{2},0,0,0)^{\mathrm{T}}+k(0,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数。

4.6 解析：非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解的结构为自身的一个特解加上对应齐次线性方程组的通解。因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有 3 个线性无关的解，且 $\boldsymbol{x}$ 为 3 维列向量，所以不可能有第 4 个线性无关的解，故 $3-R(\boldsymbol{A})+1=3$（注意非齐次线性方程组的线性无关解比对应齐次线性方程组的线性无关解多一个解），即 $R(\boldsymbol{A})=1$，所以导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 2 个向量，可知（A）、（B）均错误。又因为 $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，（D）错误，根据排除法选（C）。

解：（C）。

4.7 解析：此题为方程组、矩阵与向量关系的概念题。

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有等价的形式：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}\ 。$$

所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当向量 $\boldsymbol{b}$ 能被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解说明此表示法不唯一，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关。故选（A）。

解：（A）

4.8 解析：用排除法。$\lambda=3$ 时后两个方程为矛盾方程，据此可排除（C）；若 $\lambda=2$，最后两个方程变为 $\begin{cases}x_3=-2\\x_3=1\end{cases}$，与方程组有唯一解矛盾，排除（B）；若 $\lambda=4$，最后两个方程变为 $\begin{cases}x_3=0\\x_3=-1\end{cases}$，同样可排除（D）。（A）正确。

解：（A）。

4.9 解析：本题的难点是三对角行列式$|\boldsymbol{A}|$的计算，可用数学归纳法证明，即招数 24.3.2，需要用到行列式按行（列）展开公式。

（1）**证明**：记$D_n=|\boldsymbol{A}|$。下面用数学归纳法证明$D_n=(n+1)a^n$。

①当$n=1$时，$D_1=2a=(n+1)a^n$，结论成立。

当$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2=(n+1)a^n$，结论也成立。

②假设结论对小于n的情况成立。将D_n按第一行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n\text{。}$$

故$D_n=(n+1)a^n$，即结论对n的情况成立。

综上，归纳假设$D_n=(n+1)a^n$成立。

注：这里也可用递推法。由$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，得$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$，故

$$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n\text{。}$$

于是$D_n=(n+1)a^n$。

（2）**解**：当$a\neq0$时，根据（1）的结论，方程组的系数行列式$D_n\neq0$，故方程组有唯一解．由克拉默法则，将D_n的第一列换成$\boldsymbol{b}$，得行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1}=D_{n-1}=na^{n-1},$$

所以$x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$。

（3）**解**：当$a=0$时，方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数。

4.10 解析：（1）根据系数矩阵的秩与基础解系的关系证明；（2）利用初等行变换化阶梯形，结合（1）中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，可确定参数 a、b，然后解方程组。

（1）**证明**：依题，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}，\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

则有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$。易见 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解（否则可推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，与假设矛盾），所以 $n-R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，即 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$。又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$。综上所述，可得 $R(\boldsymbol{A})=2$。

（2）**解**：因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-4r_1\\ r_3-ar_1}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a \end{pmatrix}\overset{r_3+(1-a)r_2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 \end{pmatrix}。$$

且根据（1）的结论，$R(\boldsymbol{A})=2$，因此有

$$\begin{cases} 4-2a=0 \\ b+4a-5=0 \end{cases}，\ 即\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}。$$

此时对原方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换，得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，$$

故原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-2x_3+4x_4+2, \\ x_2=x_3-5x_4-3。 \end{cases}$$

选 x_3、x_4 为自由未知量，则原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}，\quad k_1,k_2 \text{ 为任意常数。}$$

4.11 解析： 先化简矩阵方程再解方程组，适当运用矩阵乘法的结合律。

解： 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$，又

$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}$，于是 $\boldsymbol{A}^4=8\boldsymbol{A}$。

将上面的结论代入方程组 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$ 并整理得 $8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$。

对方程组 $8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$ 的增广阵作初等行变换，得

$$(8\boldsymbol{A}-16\boldsymbol{E},\boldsymbol{\gamma})=\begin{pmatrix}-8 & 4 & 0 & 0\\ 16 & -8 & 0 & 0\\ 8 & 4 & -16 & 8\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}。$$

求得一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 及对应齐次线性方程组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，故原方程组的通解为 $\boldsymbol{\eta}^*+k\boldsymbol{\xi}$（$k$ 为任意常数）。

4.12 解析：（1）根据系数矩阵和增广矩阵的秩相等可求出 t；（2）常规解法。

解：（1）先对原方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 3 & 0 & t\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 5 & -2 & t-2\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2\end{pmatrix}。$$

要使 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，必须 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，所以得 $t=2$。

（2）当 $t=2$ 时，因为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\0&-4&5&-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2\times(-\frac{1}{4})\\r_1-2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&0&1\\0&1&-\frac{5}{4}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以有同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{2}x_3+1,\\x_2=\dfrac{5}{4}x_3-\dfrac{1}{2}x_4。\end{cases}$$

当$x_3=x_4=0$时，其所求的特解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$。

4.13 解析：可利用方程组的等价（即同解）与矩阵等价的关系来证明必要性；充分性的证明难一些，须知齐次线性方程组的解集构成一个向量空间。首先易证$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的解空间包含在$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$的解空间内，然后判断两个方程组的解空间的基（即方程组的基础解系）相同即可断言解空间相等。

证明：“$\Leftarrow$”：因为$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$同解，所以矩阵$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{B}$等价。因为等价的矩阵必等秩，所以$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$。

“$\Rightarrow$”：设$\boldsymbol{\xi}$为$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的一个解，即$\boldsymbol{B\xi}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{AB\xi}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\xi})=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的解空间包含在$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$的解空间内。

任取$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系：$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$。根据上面的结论，它们也是$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$的一组线性无关解。另据已知$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$，可得$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$有相同向量个数的基础解系。因为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，且个数符合$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$的基础解系的要求，所以$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$也是$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系。

齐次线性方程组的基础解系相同，则其解空间必相同，即$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$同解。

4.14 解析：（1）常规题型。（2）求非零公共解，将（II）的通解代入方程组（I），然后通过限制任意常数的值得到公共解的形式。

解：（1）方程组（I）的系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，故可得其基础解系为$(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

（2）将（II）的通解$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)^{\mathrm{T}}$代入方程组（I），得$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}$，即$k_1+k_2=0$。令$k_2=k$，则$k_1=-k$，可得

$$\left(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2\right)^{\mathrm{T}}=\left(-k,k,k,k\right)^{\mathrm{T}}=k\left(-1,1,1,1\right)^{\mathrm{T}}。$$

故方程组（I）和（II）有非零公共解，即为$k\left(-1,1,1,1\right)^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意非零常数。

4.15 解析： 根据存在 3 阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，可知$\left|\boldsymbol{A}\right|=0$，据此可以求得$\lambda$的值，至于行列式$\left|\boldsymbol{B}\right|$是否为零，可根据$\boldsymbol{B}$的秩来判断。解此题要用到招数 46.3.2。

设$R\left(\boldsymbol{A}\right)=r$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系由$3-r$个向量组成。又设$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\right)$，由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$得$\boldsymbol{AB}=\left(\boldsymbol{Ab}_1,\boldsymbol{Ab}_2,\boldsymbol{Ab}_3\right)=\boldsymbol{O}$，即$\boldsymbol{Ab}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Ab}_2=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Ab}_3=\boldsymbol{0}$。所以$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量，$R\left(\boldsymbol{B}\right)\leqslant 3-r$。又由$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，可得$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$必有非零解，从而得

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0,$$

即$\lambda=1$，所以$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$。易见$R(\boldsymbol{A})=1$，所以$R\left(\boldsymbol{B}\right)\leqslant 3-r=2$，故$\left|\boldsymbol{B}\right|=0$。综合上述，（C）正确。

解：（C）。

4.16 解析： 本题类似例 43.3.5，利用方程组有无穷多解的充要条件$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{B}\right)<3$证明即可。

证明：必要性。设这n张平面过同一条直线，则以x、y、z为未知量的方程组

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\ （i=1,2,\cdots,n）。$$

有无穷多解。由此可知，系数阵$\boldsymbol{A}$与增广阵$\boldsymbol{B}$的秩相等且小于未知量的个数，即

$$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{B}\right)<3。$$

充分性。若$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{B}\right)<3$，则方程组有无穷多解，表明这$n$张平面有无穷多个公共点，即它们过同一条直线或同一张平面，从而总过同一条直线。

4.17 解析： 利用向量组的线性表示与方程组的关系。

解：（1）$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示当且仅当方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$无解，即$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\neq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-4r_1\\r_4-2r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix},$$

$$\overset{\substack{r_3+r_2\\r_4-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix},$$

所以当$b\neq 2$且a为任意常数时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\neq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

（2）当$b=2$时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。下面对$a$进一步分情况讨论。

①当$b=2$，$a\neq 1$时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组有唯一解$(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，因此可得$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$。

②当$b=2$，$a=1$时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

方程组的通解为$\left(-1,2,0\right)^{\mathrm{T}}+k\left(-2,1,1\right)^{\mathrm{T}}$，此时有$\boldsymbol{\beta}=-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$k$为任意常数。

4.18 解析：若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{B}$的列向量都是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，从而可以将方程组和矩阵联系在一起。

解：根据已知$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，转置得$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$。令$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3\right)$，则$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$均为齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解。

因为$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，故存在某$\boldsymbol{\beta}_j\neq\boldsymbol{0}(1\leqslant j\leqslant 3)$，即齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解。由此得$R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)<\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的列数$=3$，即

$$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)<3。$$

根据初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1&2\\2&a+1&2a&3a+1\\1&1&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&a-1&2a-2&3a-3\\0&0&a-1&a-1\end{pmatrix},$$

可得$a=1$。

4.19 解析：本题考查非齐次线性方程组解的结构，需要将方程组与向量组联系起来，要用到招数 47.3.2。

解：由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关及 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_4$ 知 $R(\boldsymbol{A})=3$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量。再由 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_4$，即知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\4\end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。再由

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}。$$

知 $\boldsymbol{\eta}_0=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解。于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}，k \text{ 为任意常数。}$$

4.20 解析：本题考查矩阵方程与向量组之间的关系、等价的矩阵必等秩、齐次线性方程组解的结构。

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times r$ 矩阵，其列向量记为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$；$\boldsymbol{AB}$ 的列向量记为 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r$，则

$$(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r)=\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{B}，$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 的 r 个列向量 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合。又因 $\boldsymbol{B}$ 可逆，故

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r)\boldsymbol{B}^{-1}。$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r$ 的线性组合，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r$ 等价。根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为某齐次线性方程组的基础解系，可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。因为等价必等秩，所以 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r$ 也线性无关。综合上述，与某齐次线性方程组的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价且线性无关的 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r$ 也为该方程组的基础解系。

4.21 解析：若要结合线性方程组来证明，类似例 47.3.8，可用招数 47.3.3，将之对应齐次线性方程组，根据方程组系数阵的秩与方程组的解的关系，思路将豁然开朗。用反证法更方便。

证明：用反证法。设 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 不可逆，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|=0$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，设 $\boldsymbol{\eta}$ 是其中一个非零解，因此有

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}，\text{即 } \boldsymbol{BA\eta}=\boldsymbol{\eta}。\tag{4.21.1}$$

对于齐次线性方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{A\eta}-(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{A\eta}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{A\eta}-\boldsymbol{A\eta}=0\text{。}$$

从式（4.21.1）易见$\boldsymbol{A\eta}\neq\boldsymbol{0}$。因此$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解，这与$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$可逆矛盾。故$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$可逆。

4.22 解析：遇到伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$，一般都要用到式$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$。必要性易证，对于充分性，必须证明两点：（1）方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解；（2）$R(\boldsymbol{A})=n-1$。使用招数 47.3.2，将$\boldsymbol{A}$拆解成列向量组，根据$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$可得到$\boldsymbol{A}$的列向量组的信息。本题的特点是涉及的概念很多，综合性强，将这些概念形成完整的思路有一定困难。

证明：“$\Rightarrow$”设方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则$R(\boldsymbol{A})<n$，即$|\boldsymbol{A}|=0$。

设$\boldsymbol{\xi}$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解，则有

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A\xi}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}\text{，}$$

即$\boldsymbol{b}$为方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解。

“$\Leftarrow$”设$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$为方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，即方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解，故$R(\boldsymbol{A}^*)<n$。又因为$A_{11}\neq 0$，所以$R(\boldsymbol{A}^*)=1$（注：此处用到例 11.3.4 的结论），此时有$|\boldsymbol{A}|=0$。因为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，所以$R(\boldsymbol{A})=n-1$。

令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，再根据$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，可得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的$n$个解。因为$\boldsymbol{AA}^*=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，所以有

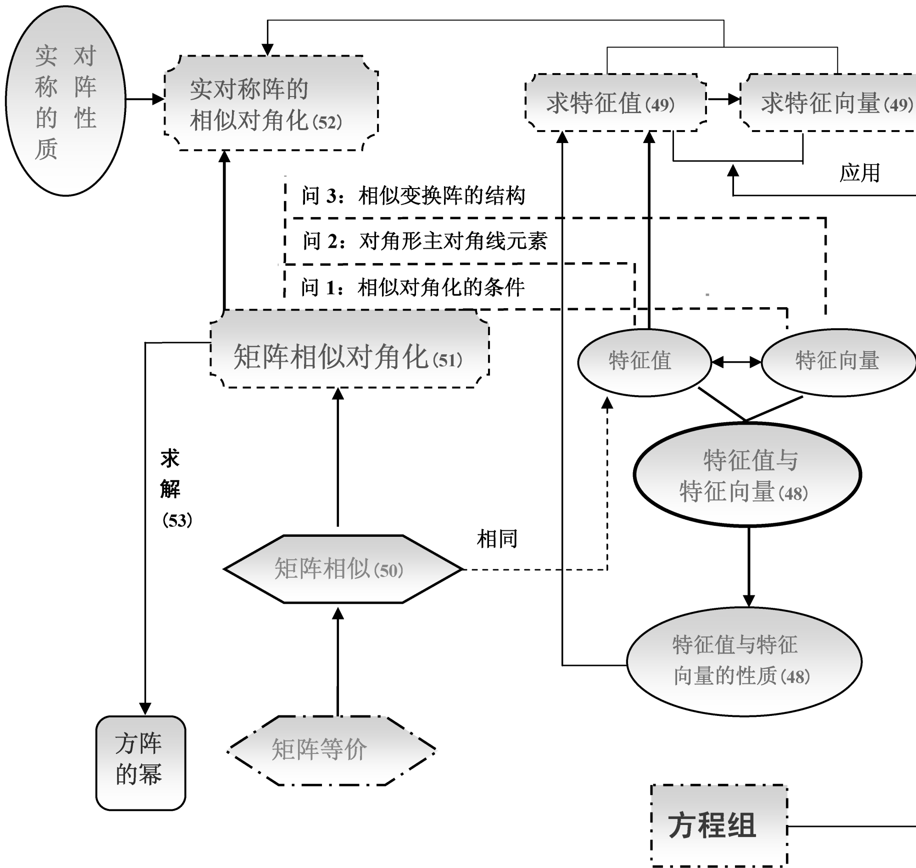
$$A_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+A_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+A_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}\text{。}$$

又因为$A_{11}\neq 0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1$能被$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示。根据$R(\boldsymbol{A})=n-1$可得$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关且为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，所以$\boldsymbol{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，即$\boldsymbol{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，也即$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解。

因为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解且$R(\boldsymbol{A})=n-1$，所以$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解。

第 5 篇　矩阵的特征值与特征向量

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

第 5 篇

综　　述

当教材首次提出特征值与特征向量的概念时(48)，因为它们比较抽象，不好理解，所以直到提出矩阵相似概念的时候大家才能更深刻地理解它们。

矩阵相似是矩阵之间的第二种重要关系，是矩阵等价的一种特殊情形：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QAP}$，此时若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 互逆，即 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}$（要求矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为方阵），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似(50)。由此可见，矩阵的秩也为矩阵相似下的不变量，但特征值是矩阵相似特有的不变量。

特征值与特征向量是成对出现的，一个特征值对应无数的特征向量。在求解它们时，一般是先求特征值，再求特征向量，而求解的过程即为解齐次线性方程组的一个典型应用。有时候利用特征值的性质也可以用来求特征值(49)。

这里自然地提出一个问题：矩阵能否相似对角化(51)？此问题可以分解成三个小问题：(1) 矩阵相似对角化的条件是什么？(2) 对角化后主对角线上的元素是什么？(3) 相似变换矩阵的构造是什么？通过对矩阵用分块的方法进行研究，可以解决这三个小问题，结论是：n 阶矩阵能相似对角化的充分必要条件是矩阵有 n 个线性无关的特征向量，这个条件不是所有矩阵都能够满足的，而实对称阵必可相似对角化(52)；对角化后的对角线上的元素即矩阵的特征值，而相似变换阵中的列向量为对应特征值的特征向量。

需要特别说明的是实对称阵的对角化，它是本课程中计算最为繁杂的知识点，但常规的题目还是很机械的。实对称阵一般不仅可以相似对角化，而且可以进一步通过正交变换对角化，也就是相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的列向量组可以规范正交化，使得 $\boldsymbol{P}$ 转化为正交阵。这样，原来相似变换的过程要加上对线性无关的特征向量组成的向量组进行施密特正交化和单位化的过程。

矩阵的相似变换在工程技术中有着广泛的应用，但在教材中主要涉及一种应用，即求方阵的高次幂(53)，它不好找规律，但是通过矩阵的相似对角化，可以轻松地求出来，

当然前提是此方阵能够相似对角化。

注：文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己的实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

更多资源请扫二维码:

知识点 48　特征值与特征向量的概念与性质

更多资源请扫二维码:

48.1　概念、定理及性质

1．概念

定义 48.1.1　方阵的特征值与特征向量　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果数λ和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 使得关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 成立，那么数 λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量。

2．定理

定理 48.1.1　设$\lambda_1, \lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2,\cdots, \boldsymbol{p}_m$依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_m$各不相等，则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots, \boldsymbol{p}_m$线性无关。

3．性质

性质 48.1.1　特征值的性质

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2,\cdots,\lambda_n$，不难证明：

（1）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

（2）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$。

性质 48.1.2　矩阵多项式的特征值

设数λ是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$f(x)$ 为多项式，则 $f(\lambda)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值。

48.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 49
- **综述**：特征值和特征向量的概念比较抽象，不好理解，大家可先记住它们。特征值与特征向量是成对的，也就是说，一个特征值对应无穷个特征向量，它们构成向量空间；但一个特征向量只对应一个特征值。注意特征向量必须是非零的，而特征值则可以为零。关于特征值的性质 48.1.1、性质 48.1.2 非常实用，如利用性质 48.1.1 可由部分特征值推导出其他特征值。

48.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 14.3.4，例 58.3.2

例 48.3.1（难度系数 0.2）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则（　）。

（A）$|\boldsymbol{A}|=1$　（B）$\boldsymbol{A}$ 的特征根都是 1　（C）$R(\boldsymbol{A})=n$　（D）$\boldsymbol{A}$ 一定是对称阵

解析：采用排除法。（A）错误，根据 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 可得 $|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}|^2=1$，则 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$，故不能断言 $\left|\boldsymbol{A}\right|=1$；（B）、（D）错误，它们均可用反例 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ 说明，此时 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1、-1 且非对称阵。

解：（C）。

招数 48.3.1　险招：通过基于逻辑与概念的猜测举反例。

举反例是许多学生感到头痛的问题。选择题不可避免地会遇到需要举反例的情况，且考研真题中线性代数部分以选择题居多。如何能快速想到合适的反例呢？必须承认，举反例需要猜测，但是这种猜测必须建立在逻辑与概念的基础上。这里以例 48.3.1 说明举反例的一些基本原则。

首先，要明确目标。如例 48.3.1 的反例，目标是找到满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 但 $\boldsymbol{A}$ 的特征根不都是 1 的例子。

其次，要符合概念。虽然大家可以猜测到 $\boldsymbol{A}$ 的特征根未必为 1，但也不能无目标地乱试。根据概念，设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 为对应的特征向量，则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\lambda^2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}$，因此 $(\lambda^2-1)\boldsymbol{\xi}=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征根只可能取 1 或−1。

最后要符合逻辑。根据上面的分析，在尽可能简单的情况下，易想到令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，先用此矩阵验证，发现它可以作为（B）的反例，但是不可以作为（D）的反例，怎么办？要想让它成为（D）的反例，必须在 $\boldsymbol{A}$ 的基础上变为非对称阵。注意改动的前提是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 与−1，最简单的设想是将 $\boldsymbol{A}$ 左下角的 0 改成非零元。

例 48.3.2（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值分别是−1、2、3，求 $\left|\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}\right|$。

解析：根据特征值的性质 48.1.1（2）及性质 48.1.2 即可求出。

解：设 $\varphi(x)=x^3-x+4$，则 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$。由性质 48.1.2 可知，$\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $\varphi(-1)=4$，$\varphi(2)=10$，$\varphi(3)=28$，于是由性质 48.1.1（2）得 $\left|\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}\right|=4\times10\times28=1120$。

例 48.3.3（难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征向量，它们对应的特征值互不相等，记 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

解析：用反证法。先假设 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，利用不同特征值对应的特征向量线性无关的结论易得出矛盾。

证明： 用反证法。假设 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则存在实数 λ，使得

$$\boldsymbol{A\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda\boldsymbol{\alpha}_3,$$

又根据 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征向量，设 λ_1、λ_2、λ_3 为对应的三个互不相等的特征值，则有

$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

从而 $(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda-\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$。因为特征值互不相等，所以它们对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即得等式 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，而这又与已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相等矛盾。因此 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

例 48.3.4（难度系数 0.4，2005 年考研数学一真题）　设 λ_1、λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是（　）。

（A）$\lambda_1\neq 0$　　（B）$\lambda_2\neq 0$　　（C）$\lambda_1=0$　　（D）$\lambda_2=0$

解析： 本题提供两种方法。方法一：定义法；方法二：根据 λ_1、λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，可以得到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，再将矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2))$ 转化为两个矩阵相乘的形式，由矩阵可逆的条件即可判定出结论。方法二简单些。

解一： 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=0$，则

$$(k_1+k_2\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}。$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是不同的特征值对应的特征向量，它们线性无关，于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1=0,\\ k_2\lambda_2=0.\end{cases}$$

当 $\lambda_2\neq 0$ 时，可得 $k_1=k_2=0$，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关；反之，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关，则必然有 $\lambda_2\neq 0$，否则若 $\lambda_2=0$，自然有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 成比例，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性相关，这与不同特征值对应的特征向量线性无关矛盾。选（B）。

解二： 由于 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充要条件是矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2))$ 满秩，再根据矩阵乘法的秩的性质，可得矩阵 $\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ 满秩，即 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$。故应选（B）。

例 48.3.5（难度系数 0.8）　已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶非零矩阵，且

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}。$$

证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 0 或 1，并且若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应 $\lambda=1$ 的一个特征向量，则 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 对应 $\lambda=0$ 的一个特征向量。

解析： 利用定义，直接在定义式中适当左乘矩阵即可得出一个矩阵方程，再利用特征向量非零可求出特征值。特征向量也是利用概念式求解。这是一种常规方法。

证明： 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{Ax}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，可得 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即 $(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{x}=0$。因为特征向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda=1$ 或 0。同理可证 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 0 或 1。

若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应 $\lambda=1$ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，左乘 $\boldsymbol{B}$，由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 对应 $\lambda=0$ 的特征向量。

知识点 49　特征值和特征向量的求解

更多资源请扫二维码：

49.1　结论

结论 49.1.1　特征值与特征向量的求法

对于方阵 $\boldsymbol{A}$，先根据 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 求出所有特征值，然后针对各个特征值 λ，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其通解中的非零向量即特征值 λ 对应的特征向量。

49.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 48
- **综述**：特征值与特征向量的常规解法用到了求解线性方程组的知识。具体步骤如下：把 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 移项得 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，若将 λ 看成已知量来求解 $\boldsymbol{x}$，则它是一个齐次线性方程组，而特征向量是此方程组的非零解，又因为特征向量 $\boldsymbol{x}$ 非零，即此齐次方程组有非零解，根据克拉默法则可得 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$。由此可求出特征值，再将特征值代入齐次线性方程组（$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 中，即可求出对应的特征向量。另外还有几种方法：其一是通过特征值的性质求特征值；其二是利用相似变换后矩阵的特征值不变的性质求特征值；其三是利用概念式列方程求特征值。

49.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 14.3.4，例 16.3.4，例 54.3.4，例 55.3.1

例 49.3.1（难度系数 0.4）　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & -a-2 & 2a\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解析： 基础题型。先由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 求特征值，再通过求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解得到特征向量。请通过此题记住求特征值与特征向量的步骤。

解：$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda-1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 3 & 1-a & 2a-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-2a+1)\text{。}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=2a-1$。

对 $\lambda_1=1$，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{a+2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可得对应特征向量 $k_1(a+2,3,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1 为非零的任意常数。

对 $\lambda_2=2$，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & -a-2 & 2a-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可得对应特征向量 $k_2(2,2,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_2 为非零的任意常数。

对 $\lambda_3=2a-1$，解 $[\boldsymbol{A}-(2a-1)\boldsymbol{E}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据

$$\boldsymbol{A}-(2a-1)\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2-2a & 0 & 2\\ 0 & 2-2a & 2\\ 3 & -a-2 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1-a & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可得对应的特征向量 $k_3(1,1,a-1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_3 为非零的任意常数。

注：此题若化行最简形，则需要对 a 分情况讨论，这样太麻烦了。若掌握了方程组解的结构理论，则不必如此，只需要选择 x_2 作为自由未知量，令 $x_2=1$，即可得出“非典型”的基础解系。

例 49.3.2（难度系数 0.4,跨知识点 50） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的三维列向量组，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

解析：$\boldsymbol{A}$ 为抽象矩阵。根据相似变换矩阵特征值不变的性质，可通过相似变换化简后的矩阵来确定特征值。注意化简后的相似矩阵不一定要求是对角阵，上三角阵也可以。此题由给出的三个等式即可根据矩阵分块的原理“组装”出一个相似变换。

解：根据 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，易求得 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值为 2（二重）和 0。由相似矩阵的特征值相同，可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 2（二重）和 0。

例 49.3.3（难度系数 0.6）　设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，证明：

（1）λ^2 为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值；

（2）λ 的多项式 $\lambda^3-2\lambda^2+3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相应多项式 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{E}$ 的特征值；

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 λ^{-1} 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\lambda^{-1}\left|\boldsymbol{A}\right|$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值。

解析：此题求矩阵多项式、逆矩阵及伴随矩阵的特征值。可证明若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 的相应特征值的特征向量，再根据定义易求特征值。

证明：（1）由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 可推出 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，故 λ^2 为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值。

（2）由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 可推出 $(\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{E\alpha})=\lambda^3\boldsymbol{\alpha}-2\lambda^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^3-2\lambda^2+3)\boldsymbol{\alpha}$，故 $\lambda^3-2\lambda^2+3$ 为 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{E}$ 的特征值。

（3）因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其特征值 $\lambda\neq0$。由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 可推出 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，故 λ^{-1} 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值。

（4）因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其特征值 $\lambda\neq0$。由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 可推出 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}$，即 $\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}$，因此得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda^{-1}\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{\alpha}$，故 $\lambda^{-1}\left|\boldsymbol{A}\right|$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值。

例 49.3.4（难度系数 0.6，2003 年考研数学一真题）　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}\text{。}$$

求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量。其中，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵。

解析：此题可用两种方法。第一种方法是先按部就班地计算出矩阵 $\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{P}^{-1}$，进一步求出 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，再按常规方法确定 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值和特征向量；第二种方法是根据特征值的对应关系，先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量，再确定 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值与特征向量，最终根据 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 相似求出其特征值与特征向量。两种方法各有优劣，第一种方法思路简单，但是计算量相当大；第二种方法计算量小一些，但是需要一些技巧及熟练掌握相关概念与性质。

解：方法一。经计算可得

$$A^*=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix}。$$

从而

$$B+2E=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix},$$

即

$$|(B+2E)-\lambda E|=\begin{vmatrix}9-\lambda&0&0\\-2&7-\lambda&-4\\-2&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-9)^2(\lambda-3)。$$

故 $B+2E$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=9$，$\lambda_3=3$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 时，解 $[(B+2E)-9E]x=\mathbf{0}$，由

$$(B+2E)-9E=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-2&-4\\-2&-2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得线性无关的特征向量为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}。$$

$B+2E$ 属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=9$ 的所有特征向量为

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中，k_1、k_2 是不全为零的任意常数。

当 $\lambda_3=3$ 时，解 $[(B+2E)-3E]x=\mathbf{0}$，由

$$(B+2E)-3E=\begin{pmatrix}6&0&0\\-2&4&-4\\-2&-2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

得线性无关的特征向量为 $\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。$B+2E$ 属于特征值 $\lambda_3=3$ 的所有特征向量为 $k_3\eta_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_3 为非零的任意常数。

方法二：设 A 的特征值为 λ，对应特征向量为 η，即 $A\eta=\lambda\eta$。

由于 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-7)$，故 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=7。$$

故 $|A|=1\times1\times7=7$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解得 A 对应的线性无关特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_3=7$ 时，解得 A 对应的线性无关特征向量为 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

由已知易得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，故 $P^{-1}\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$P^{-1}\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$P^{-1}\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。

由于 $|A|=7\neq0$，所以 $\lambda\neq0$. 根据例 49.3.3 的结论，有 $\lambda^{-1}|A|$ 为 A^* 的特征值。于是有

$$B(P^{-1}\eta)=P^{-1}A^*P(P^{-1}\eta)=\lambda^{-1}|A|(P^{-1}\eta),$$

即 $\lambda^{-1}|A|$ 是 B 的特征值，又

$$(B+2E)P^{-1}\eta=\left(\lambda^{-1}|A|+2\right)P^{-1}\eta,$$

因此 $\lambda^{-1}|A|+2$ 为 $B+2E$ 的特征值，对应的特征向量为 $P^{-1}\eta$。

综上可得 $B+2E$ 的 3 个特征值分别为 9、9、3。对应于特征值 9 的全部特征向量为 $k_1P^{-1}\eta_1+k_2P^{-1}\eta_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不全为零的任意常数；

对应于特征值 3 的全部特征向量为 $k_3P^{-1}\eta_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_3 是不为零的任意常数。

注：设 $B=P^{-1}AP$，若 λ 是 A 的特征值，对应的特征向量为 η，则 B 与 A 有相同的特征值，但对应的特征向量不同，B 对应特征值 λ 的特征向量为 $P^{-1}\eta$。

例 49.3.5（难度系数 0.8）　A 为 n 阶矩阵，$A=E+xy^{\mathrm{T}}$，x 和 y 都是第一个分量非零的 $n\times1$ 矩阵，且 $x^{\mathrm{T}}y=2$，求 A 的特征值与特征向量。

解析：此题考查特征值、特征向量的概念与判断。这里 A 的特征值是利用概念式来求，而 A 的特征向量是依据其与 $B=xy^{\mathrm{T}}$ 的特征向量相同来求。

解：记 $B=xy^{\mathrm{T}}$，则 $A=E+xy^{\mathrm{T}}=E+B$，$R(B)=1$ 且 $B^2=x(y^{\mathrm{T}}x)y^{\mathrm{T}}=2B$。

设 λ 是 B 的特征值，α $(\alpha\neq0)$ 是对应 λ 的特征向量，即 $B\alpha=\lambda\alpha$，则 $B^2\alpha=\lambda^2\alpha$。

又根据上面结果有 $\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=2\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即 $\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=2\lambda\boldsymbol{\alpha}$，故 $(\lambda^2-2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，可得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=0,2$。

设非零 $n\times1$ 矩阵 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，根据已知 $x_1\neq0$，$y_1\neq0$。

对于 $\lambda=0$，根据 $\boldsymbol{B}-0\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，可求得其对应的特征向量为

$$k_1(-y_2,y_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-y_3,0,y_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+k_{n-1}(-y_n,0,0,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 是不全为 0 的任意常数。

对于 $\lambda=2$，由 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=2$ 即 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2$，可推出 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}$，所以对应的特征向量为 $k_n\boldsymbol{x}$(k_n 为非零的任意常数)。

综上得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=1$，$\lambda_n=3$。

根据 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}=(1+\lambda)\boldsymbol{\alpha}$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应 $1+\lambda$ 与 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量。故 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=1$ 的特征向量为

$$k_1(-y_2,y_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-y_3,0,y_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+k_{n-1}(-y_n,0,0,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 不全为 0。

$\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_n=3$ 的特征向量为 $k_n\boldsymbol{x}$，其中 k_n 为非零的任意常数。

招数 49.3.1　妙招：求特征向量的“指东打西”法。

当某矩阵的特征向量不易求时，可以用“指东打西”法，即找到另一个与之有相同的特征向量的矩阵，求出后者的特征向量自然也求出了前者的。此方法不具典型性，因为它对两个向量的关系有特殊的要求，使用范围不广。

知识点 50　相似矩阵的概念及性质

更多资源请扫二维码:

50.1　概念、定理

1．概念

定义 50.1.1　相似矩阵　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似。对 $\boldsymbol{A}$ 进行的运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行

相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵。

2．定理

定理 50.1.1　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值亦相同。

推论　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n)$相似，则$\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n$即 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值。

50.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 48，知识点 49
- **综述**：矩阵相似是矩阵的第二大关系，它是矩阵等价的特殊情况，即在矩阵等价概念的基础上加一条限制：左右两个变换矩阵是互逆的（此时自然要求矩阵为方阵）。本课程未介绍矩阵相似概念的背景，大家可结合知识点 51 中矩阵的相似对角化来理解。注意矩阵相似变换下的不变量为矩阵的特征值，但是其逆命题不成立，即具有相同特征值的矩阵未必相似，在矩阵可对角化的情形下，特征值相同的矩阵必相似。

50.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 49.3.2

例 50.3.1（难度系数 0.6）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，则 α 、β 的值分别为（　）。

（A）0，0　　（B）0，1　　（C） 1，0　　（D）1，1

解析：因为相似矩阵的行列式的值相同，故 $|\boldsymbol{A}|=2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2=-(\alpha-\beta)^2=|\boldsymbol{B}|=0$，据此排除（B）、（C）。假设（D）正确，易求得 $R(\boldsymbol{A})=1$，而 $R(\boldsymbol{B})=2$，与相似矩阵的秩必相等的结论矛盾，故（D）错。根据排除法可知（A）正确。

解：（A）。

例 50.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 30）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值−1、1 的特征向量，向量$\boldsymbol{\alpha}_3$满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 。

（1）证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

（2）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 。

解析：（1）用定义法，需要利用不同的特征值对应的特征向量线性无关的结论；（2）利用矩阵的分块，构造出 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，自然可得结果。

证明：（1）由题设可知，$\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$ 。

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}\text{，}\tag{50.1}$$

左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $-x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$，即

$$-x_1\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}\text{，}\tag{50.2}$$

式（50.2）减去式（50.1），得 $-2x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$。又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为不同特征值的特征向量，则二者线性无关，故 $x_1=0,x_3=0$。将其代入式（50.1），得 $x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，故 $x_2=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

（2）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

又由（1）可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，根据矩阵乘法的秩的性质可得 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

例 50.3.3（难度系数 0.6）　设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$（　）。

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

解析：$\boldsymbol{A}$ 是抽象矩阵，直接求秩较难，可根据矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为与 $\boldsymbol{A}$ 相似的具体矩阵，利用矩阵相似为矩阵等价的特殊情形，故其秩不变的性质，可将求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的问题转化为求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩的问题。

由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，易得 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$ 相似，且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 相似，因此

$$R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}),\ R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\text{，}$$

故

$$R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\text{。}$$

另有 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$，故 $R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=3$。

因为 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=1$。所以

$$R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=4\text{。}$$

（C）正确。

解：（C）。

例 50.3.4（难度系数 0.6，2008 年考研数学一真题）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$。则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为_______。

解析：利用分块矩阵的理论将两个等式“组装”成矩阵的乘积，再利用矩阵的相似求特征值。

根据题设条件，得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$。

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，即得 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$。因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 是可逆矩阵。因此 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$。记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，从而它们有相同的特征值。

因为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)=0$，得到 $\lambda=0$，$\lambda=1$，故 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 1。

解：1。

招数 50.3.1　绝招：矩阵的“拆”与“装”的妙用。

矩阵、向量组与线性方程组，都可以互为工具解决问题。这三个工具中，矩阵最“牛”，因此，向量组或线性方程组的问题常常归结到矩阵来解决。用矩阵解决向量组或方程组的问题的“枢纽”就是矩阵分块，若将矩阵分块形象地说成“拆”矩阵，那么反过来，将向量归结为矩阵即可称为“装”矩阵。“装”与“拆”的原理是一样的，“装”矩阵可将向量的问题转化为矩阵的问题来研究，例 50.3.4 即一个“装”矩阵的精彩例子。此方法在考研题中很常见。

知识点 51　矩阵的相似对角化

更多资源请扫二维码:

51.1　概念、定理

1．概念

定义 51.1.1　矩阵的相似对角化　对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵的过程，称为把方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化。

2．定理

定理 51.1.1　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似（即 $\boldsymbol{A}$ 能相似对角化）的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$

有 n 个线性无关的特征向量。

推论 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似。

51.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 50，知识点 52
- **综述**：在本篇综述中提及矩阵的相似对角化问题可分为三个小问题，这里不再赘述。矩阵相似对角化问题的解决得益于矩阵的分块，通过它可得出相似变换矩阵的结构，也可以明确对角阵中对角线上元素的特点。特征值与特征向量的概念可结合此知识点来理解。注意并不是所有的方阵都可以相似对角化的，定理 51.1.1 及推论说明了其条件。矩阵相似对角化的步骤为：第一步，求矩阵的特征值与特征向量；第二步，针对各特征值，求出其对应的所有线性无关的特征向量；第三步，用特征值构造对角阵，用特征向量构造相似变换阵，最后加以说明。

51.3 经典例题精解巧析

例 51.3.1（难度系数 0.4） 已知 $\lambda=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-a&1&a\\4&a&-3\end{pmatrix}$ 的特征值，问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化？说明理由。

解析：利用 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值得到的等式 $|\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E}|=0$ 可求出 a。通过判断 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值是否有 k 个线性无关的特征向量，即可判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化。

解：由题设知 $|\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}3&2&-2\\-a&1&a\\4&a&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&1&a\\1&a&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&1&a\\0&a-2&-1\end{vmatrix}=-1-a(a-2)=-(a-1)^2=0\text{，故 }a=1\text{。}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\-1&1-\lambda&1\\4&1&-3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-2\\0&1-\lambda&1\\1-\lambda&1&-3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-2\\0&1-\lambda&1\\0&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(1-\lambda)\text{。}$$

因此得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$。

$\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的方程组为 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因为

$$A-0E=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&1&1\\4&1&-3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&5&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(A-0E)=2$，故 $(A-0E)x=0$ 的基础解系只含一个解向量，即 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 只对应一个线性无关的特征向量，因此 A 不能相似对角化。

例 51.3.2（难度系数 0.6） 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$，求行列式 $\left|B^{-1}-E\right|$。

解析：已知矩阵 A 的特征值，再根据 A 与 B 相似，可得 B 的特征值，进一步可得到 B^{-1} 的特征值。求行列式 $\left|B^{-1}-E\right|$ 时，为了能借助特征值，需设法利用 B^{-1} 的相似对角化，结合矩阵乘法的行列式的性质求解，具体解释见“招数 51.3.1”。这是常用的技巧。

解：矩阵 A 与 B 相似，因此 B 的特征值与 A 的特征值相同，也为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$，可得 B^{-1} 的特征值为 2、3、4、5。因为这 4 个特征值互异，所以 B^{-1} 可相似于对角阵，即存在可逆阵 Q，使得 $Q^{-1}B^{-1}Q=\Lambda_1=\mathrm{diag}(2,3,4,5)$。从而

$$\begin{aligned}\left|B^{-1}-E\right|&=\left|Q\Lambda_1Q^{-1}-E\right|=\left|Q\Lambda_1Q^{-1}-QQ^{-1}\right|\\&=|Q|\left|\Lambda_1-E\right|\left|Q^{-1}\right|=\left|\Lambda_1-E\right|\\&=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=24。\end{aligned}$$

招数 51.3.1 绝招：矩阵相似对角化与矩阵乘法的行列式的性质“双剑合璧”。

在一类求行列式的题目中，首先应想到矩阵能否相似对角化，为什么呢？这是因为矩阵的相似对角化有一个绝妙的性质，就是保持行列式的值不变：

$$|P^{-1}AP|=|P|^{-1}|A||P|=|A|。$$

它是矩阵相似与矩阵乘法的行列式的性质“双剑合璧”的结晶。有了它，当遇到求抽象矩阵对应的行列式的问题时即可通过相似变换将行列式中的矩阵化成对角阵，再利用矩阵乘法的行列式的性质，最后变成求对角阵的行列式，从而简化运算，此技巧威力无穷。

例 51.3.3（难度系数 0.4）设 A 是 3 阶矩阵，已知 $\left|A+E\right|=0$，$\left|A+2E\right|=0,\left|A+3E\right|=0$，$B$ 与 A 相似，求与 B 相似的对角阵。

解析：首先根据概念可得出 A 的特征值，再由 B 与 A 相似，可知 B 与 A 的特征值相同，从而判定 B 能否相似对角化。若可以，则对角阵的主对角线上的元素即为 B 的特征值。

解：由 $\left|A+E\right|=0,\left|A+2E\right|=0,\left|A+3E\right|=0$ 知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$，

又根据相似矩阵具有相同的特征值，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$，因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值互不相同，所以它可以相似对角化，且与 $\boldsymbol{B}$ 相似的对角阵为 $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & -3\end{pmatrix}$。

招数 51.3.2　妙招：通过矩阵相似将矩阵的性质“乾坤大挪移”。

相似矩阵有很多好的性质，如行列式的值不变、矩阵的秩不变及特征值不变，特征向量也有对应的关系，因此通过矩阵的相似可将矩阵的性质进行“乾坤大挪移”，这是常用的技巧。具体表现为两种情形：一种是将矩阵相似对角化，将一般矩阵的性质转化为简单对角阵的性质；另一种是不必要对角化，只需要通过相似变换转化即可，比如一个矩阵为抽象矩阵，另一个为具体矩阵，可通过具体矩阵的性质讨论抽象矩阵的性质。

例 51.3.4（难度系数 0.4）　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 相似。

（1）求 x 与 y；

（2）求一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$。

解析：（1）考查相似矩阵的性质：行列式相同、秩相同、特征值相同。（2）$\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，必可相似对角化，只需求 $\boldsymbol{A}$ 的所有线性无关特征向量即可求出 $\boldsymbol{P}$。

解：（1）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以它们的特征值相同，再根据特征值的性质，可得

$$\begin{cases}2+0+x=2+y-1,\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|。\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$。

（2）因为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-1)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1。$$

当 $\lambda_1=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$。

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$。$\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵。

例 51.3.5（难度系数 0.8）　$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵，$\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 2 且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$。

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

（2）$\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化？说明原因。

（3）求行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$。

解析：本题难点是第一问，需要对特征值的概念与性质有一个全面的理解。此题需要最大限度地利用已知条件，通过严谨的逻辑推理求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值。

解：（1）由 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 可知 -1、2 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。由 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 可推出 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，易见 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$（否则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$ 满秩，可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，与已知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 2 矛盾），由此可知 -2 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

因为 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 2，所以根据 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 可得 $R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\leqslant 1$。下面证明不可能有 $R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=0$，否则 $\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{E}$，说明 -2 为 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值，这与 -1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值矛盾，故 $R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=1$，即特征值 -2 对应两个线性无关的特征向量，由此可推出 -2 为 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值。

综上可得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 -1、2、-2、-2。

（2）因为对应于特征值 -1、2 各有一个特征向量，对应于特征值 -2 有两个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化。

（3）根据特征值的性质可得 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的特征值为 2、5、1、1。故 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=2\times5\times1\times1=10$。

例 51.3.6（难度系数 0.4）　下列矩阵中不能相似对角化的是（　）。

（A）$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$

解析：本题考查矩阵可相似对角化的各种充分条件。（A）矩阵有 3 个互不相同的特征值 1、3、0，根据不同的特征值对应的特征向量线性无关，因此可相似对角化。（D）矩阵为实对称阵，必可相似对角化。（C）矩阵的秩为 1，则它有 2 重特征值 0，且它对应有 2 个线性无关的特征向量；另一特征值非零，对于非零特征值，必有一个特征向量，因此可相似对角化。根据排除法选（B）。

解：（B）。

例 51.3.7（难度系数 0.6） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互异，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量集合与 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量集合相等，证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

解析： 若 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互异，故 $\boldsymbol{A}$ 必有 n 个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化，同理 $\boldsymbol{B}$ 也可相似对角化，把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 通过相似变换对角化的形式分别表示出来，再验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 就很容易了。

证明： 因为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互异，所以它有 n 个线性无关的特征向量。设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一组线性无关的特征向量，则矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}$ 可逆。设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 的特征值，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 分别为 $\boldsymbol{B}$ 对应特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 的特征值，则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)\boldsymbol{P}^{-1},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(\mu_1,\cdots,\mu_n\right)\boldsymbol{P}^{-1}。$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(\mu_1,\cdots,\mu_n\right)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)\mathrm{diag}\left(\mu_1,\cdots,\mu_n\right)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(\mu_1,\cdots,\mu_n\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{BA}。\end{aligned}$$

招数 51.3.3 绝招：利用矩阵的相似变换（或正交变换）对角化将问题化繁为简。

当一个矩阵可以相似对角化时，有意识地对它作相似对角化是一个思路，能正交变换对角化更好。相似对角化或正交变换对角化后有以下诸多好处。

（1）相似变换可“叠加”：$\left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right)^n=\boldsymbol{PA}^n\boldsymbol{P}^{-1}$，$\left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{PBP}^{-1}\right)=\boldsymbol{PABP}^{-1}$；

（2）两个对角形矩阵的乘法可交换；

（3）对角阵易分析矩阵的秩；

（4）相似变换保持行列式的值不变：$\left|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|$；

（5）正交变换同时保持矩阵的惯性指数（参见第 6 篇知识点 60）与特征值不变；

（6）正交变换阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$，求逆方便。

……

好处真是太多了！所以如果证明题中的矩阵满足相似对角化条件，如对实对称阵，“不管三七二十一”，先将它正交变换对角化再说，往往会有意想不到的奇效。

知识点 52 实对称矩阵的相似对角化

更多资源请扫二维码：

52.1 定理

定理 52.1.1 实对称矩阵的特征值为实数。

定理 52.1.2　设λ_1、λ_2是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 分别是对应λ_1, λ_2的特征向量。若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交。

定理 52.1.3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中$\boldsymbol{\Lambda}$是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵。

推论　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，λ是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重实根，则 R（$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$）$=n-k$，从而对应特征值$\lambda$ 恰有 k 个线性无关的特征向量。

52.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：5**
- **最关联知识点：**知识点 51
- **综述：**此知识点为一类大题型。根据定理 52.1.1，实对称阵的特征值一定是实数，说明其特征多项式一定可以完全分解，这是矩阵可相似对角化的基础。根据定理 52.1.3 的推论，它的每一个 k 重特征值必定对应 k 个线性无关的特征向量，这保证了它有 n 个线性无关的特征向量，因此实对称阵必可相似对角化。在此基础上，实对称阵还可以进一步作正交变换对角化，因为根据定理 52.1.2，它的不同特征值对应的特征向量必正交，因此只需将同一特征值对应的特征向量进行施密特正交化过程，再单位化即可得到由特征向量构成 n 维向量空间的一组规范正交基，用它们可构造出正交阵。总之，实对称阵正交变换对角化的步骤比矩阵相似对角化的步骤（参见知识点 51）多一步，即将特征向量组正交单位化。

52.3　经典例题精解巧析

例　52.3.1（难度系数 0.2）　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$，试作相似变换将其对角化。

解析：本题已经给出 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个不同的特征值，且不同特征值对应的特征向量线性无关，由此即可构造出可逆的相似变换矩阵，最终把 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化。

解：由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$，先求 $\lambda_1=0$ 的特征向量，根据

$$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_1=0$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$；同样可得 $\lambda_2=1$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_3=4$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$。

令 $\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)$，则 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\operatorname{diag}\left(0,1,4\right)。$$

例 52.3.2 （难度系数 0.6，跨知识点 43 ） 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，试求：

（1）a 的值；

（2）正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵。

解析：（1）根据方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解可知 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{A})<3$，据此可求出 a;（2）常规做法。

解：（1）线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解的充分必要条件为 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{A})<3$，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-ar_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(1-a)(2+a)&-(2+a)\end{pmatrix}。$$

为使 $R(\boldsymbol{A})<3$，须 $a=1$ 或 $a=-2$。

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=2$，$R(\boldsymbol{A})=1$，方程组无解，不符合题意。

当 $a=-2$ 时，$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{A})=2$，方程组有无穷多解，

故 $a=-2$ 为所求。

（2）$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&-2-\lambda&1\\-2&1&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+c_3}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&1&-2\\-\lambda&-2-\lambda&1\\-\lambda&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&1&-2\\0&-3-\lambda&3\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(3+\lambda)(3-\lambda)。$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$。

对于 $\lambda_1=0$，解 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

对于 $\lambda_2=3$，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

对于 $\lambda_3=-3$，解 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得

$\boldsymbol{q}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$。

则$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 3 & \\ & & -3\end{pmatrix}$。

例 52.3.3（难度系数 0.8，2006 年考研数学一真题）　设 3 阶对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1$的一个特征向量，记$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵。

（1）验证$\boldsymbol{\alpha}_1$是矩阵$\boldsymbol{B}$的特征向量，并求$\boldsymbol{B}$的全部特征值与特征向量；

（2）求矩阵$\boldsymbol{B}$。

解析：根据$\boldsymbol{A}$的特征值的性质立即可得$\boldsymbol{B}$的特征值，然后由$\boldsymbol{B}$也是对称矩阵判断出其不同的特征值对应的特征向量正交，可求出其另外两个线性无关的特征向量。

解：（1）由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$得$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，进一步得$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1&=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1\\&=\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,\end{aligned}$$

从而$\boldsymbol{\alpha}_1$是矩阵$\boldsymbol{B}$的属于特征值−2 的一个特征向量。

由$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{A}$的 3 个特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$，得$\boldsymbol{B}$的 3 个特征值为

$$\mu_1=-2,\ \mu_2=1,\ \mu_3=1。$$

设$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{B}$的属于$\mu_2=\mu_3=1$的两个线性无关的特征向量，又$\boldsymbol{A}$为对称矩阵，易得$\boldsymbol{B}$也是对称矩阵，因此$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$正交，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0。$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$可取为齐次线性方程组$(1,-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$的两个线性无关的解。因为其基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，故取$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。即$\boldsymbol{B}$对应$\mu_2=\mu_3=1$的所有特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$k_2$、$k_3$是不同时为零的任意常数。因为$\mu_1=-2$是特征多项式的单根，所以$k\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$（$k$为非零的任意常数）为$\boldsymbol{B}$对应特征值$\mu_1=-2$的所有特征向量。

（2）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

例 52.3.4（难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\\&-\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}$。

解析：由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，则存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，两边平方并利用已知等式 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，即可求出 $\boldsymbol{\Lambda}$，最后证出结论。

证明：由 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个实特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（不妨假设 $\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,r$，$\lambda_j\leqslant 0$，$j=r+1,\cdots,n$）且有 n 个正交的单位特征向量，因此存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，满足

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)。$$

上式两端分别平方，再结合 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}=\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2),$$

于是 $\lambda_i^2=1(i=1,2,\cdots,n)$．根据假设得 $\lambda_i=1(i=1,2,\cdots,r)$，$\lambda_j=-1(j=r+1,\cdots,n)$。故

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\\&-\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}。$$

例 52.3.5（难度系数 0.4）　设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵，并计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$。

解析：常规题目，考查实对称矩阵的相似对角化。此题不可能求出 a 的值，就把它当作常量来对待即可。

解：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a-\lambda & 1 & 1\\ 1 & a-\lambda & -1\\ 1 & -1 & a-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2}{=}\begin{vmatrix}a-\lambda+1 & a-\lambda+1 & 0\\ 1 & a-\lambda & -1\\ 1 & -1 & a-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2-c_1}{=}\begin{vmatrix}a-\lambda+1 & 0 & 0\\ 1 & a-\lambda-1 & -1\\ 1 & -2 & a-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda+1)[(a-\lambda-1)(a-\lambda)-2]$$

$$=-[\lambda-(a-2)][\lambda-(a+1)]^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$。

对 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，解 $[\boldsymbol{A}-(a+1)\boldsymbol{E}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-(a+1)\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

对 $\lambda_3=a-2$，解 $[\boldsymbol{A}-(a-2)\boldsymbol{E}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-(a-2)\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$。故所求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2\end{pmatrix}。$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$。

由此可得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\mu_1=\mu_2=a$，$\mu_3=a-3$，故 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\mu_1\mu_2\mu_3=a^2(a-3)$。

知识点 53　利用相似对角化求矩阵和矩阵的幂

更多资源请扫二维码:

53.1　结论

结论 53.1.1　若对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，它能通过相似变换对角化，即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$。

53.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 51，知识点 9
- **综述**：本知识点是教材中矩阵相似对角化唯一的应用。已知矩阵相似变换的对角阵及相似变换矩阵求原矩阵是矩阵相似对角化的反问题。将矩阵相似对角化反过来用而求原矩阵的幂，主要是根据矩阵相似对角化引申出的等式 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n$，即 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$，因此只要先将矩阵相似对角化（如果可以做到的话），然后从对角阵的幂即可求出原矩阵的幂。

53.3 经典例题精解巧析

例 53.3.1（难度系数 0.6）　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&x&1\end{pmatrix}$ 能相似对角化，求：

（1）x；

（2）可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$；

（3）$\boldsymbol{A}^n$。

解析：（1）$\boldsymbol{A}$ 能相似对角化的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，据此可求出 x;（2）常规算法;（3）利用相似对角化求矩阵的幂是一个常规的技巧，这是因为由矩阵相似的概念式 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 易得等式 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$ 成立，这样求一般矩阵的幂转化为求对角阵的幂与乘法运算，从而简化了问题。

解：（1）根据 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-2&2-\lambda&0\\4&x&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2=0$，可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1。$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\4&x&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&x+2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似对角化，所以此时线性无关的特征向量必须有 2 个，故 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$，因此得 $x=-2$。

（2）当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\4&-2&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得对应的特征向量为

$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_1=0$ 时，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{0E}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$。

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_1&\boldsymbol{\eta}_2&\boldsymbol{\eta}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。

（3）因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}，\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\4&-2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}。$$

例 53.3.2（难度系数 0.6）　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$（k 为正整数）。

解析：先确定 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化。若能即有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$。

解：因为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\2&4-\lambda&-2\\-3&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，所以得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因为

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故可得对应线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_3=6$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因为

$$(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故可得对应线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$。

因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$。于是

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2^k&&\\&2^k&\\&&6^k\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}。$$

经计算得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&2&2\\3&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$。

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&&\\&2^k&\\&&6^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&2\\3&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\times2^k-6^k&2^k-6^k&-2^k+6^k\\-2^{k+1}+2\times6^k&2^{k+1}+2\times6^k&2^{k+1}-2\times6^k\\3\times2^k-3\times6^k&3\times2^k-3\times6^k&2^k+3\times6^k\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

例 53.3.3（难度系数 0.8，2011 年考研数学一真题） $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A})=2$。

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（2）求 $\boldsymbol{A}$。

解析：（1）将已知矩阵等式利用矩阵分块进行“拆解”，根据概念求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；（2）这是矩阵相似对角化的反问题，即已知某矩阵的特征值与特征向量，反过来求该矩阵。

解：（1）已知条件可以分解成 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。可知 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$ 均为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 分别为它们对应的特征向量。根据 $R(\boldsymbol{A})=2$，可知 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\lambda_3=0$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值。而 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交，

因此有$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$，解得$\boldsymbol{\xi}_3 = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$k$ 为非零的任意常数。

综上可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为-1、1、0。对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

（2）将（1）中线性无关的特征向量组成可逆矩阵$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}，\text{其中 } \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}。$$

故

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

例 53.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 42）　设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 0、1、1，$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征向量，且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_2$。

（1）求 a 的值；

（2）求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解；

（3）求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

解析：（1）是本题的难点，题目只给出了两个特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$，但并未给出它们各对应哪个特征值，基于此应先分情况讨论$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$对应的特征值，从而确定参数 a;（2）需要清楚方程组解的结构，根据特征值与特征向量给出的信息对应方程组，从而构造出通解;（3）考查实对称矩阵的相似对角化。

解：（1）先假设$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$均为$\lambda_1=0$的特征向量，则$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$，这与已知等式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$$

矛盾；再设$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$均为对应$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量，则$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，根据特征向量非零可得$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{\alpha}_1$，说明$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是对应于特征值 1 的第三个线性无关的向量，而已知$\boldsymbol{A}$的特征值分别为 0、1、1，可得二重特征值 1 对应的特征向量最多为两个，矛盾。

可见$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$是属于实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同特征值的特征向量，且根据$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2$易验证$\boldsymbol{\alpha}_1$是属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2$是属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量，根据实对称矩阵的性质，属于不同特征值的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$必正交，故$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=1-a=0$，解得$a=1$。

（2）因为实对称阵$\boldsymbol{A}$可以相似对角化，且$\boldsymbol{A}$与对角阵$\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$相似，可见$R(\boldsymbol{A})=2$。于是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含解向量的数目为$3-R(\boldsymbol{A})=1$个，再根据（1）得到的$\boldsymbol{\alpha}_1$是属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量，可知$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因此$\boldsymbol{\alpha}_1$可作为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，又$\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_2$的一个特解，故方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_2$的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}，k\text{ 为任意常数。}$$

（3）设$\lambda_2=\lambda_3=1$对应的另一特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1$正交，不妨进一步要求$\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_2$也正交，则有齐次线性方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=x_1+x_2=0\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

解得$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$。

由$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

第 5 篇综合测试题

5.1（知识点 48，难度系数 0.4）　设λ_1、λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{A}$分别属于λ_1、λ_2的特征向量，则（　）。

（A）对任意$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}$都是$\boldsymbol{A}$的特征向量

（B）存在常数$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量

（C）当$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$时，$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}$不可能是$\boldsymbol{A}$的特征向量

（D）存在唯一的一组常数$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，使$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量

5.2（知识点 48，难度系数 0.4 ）　已知 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值 1、2、3 对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,9)^{\mathrm{T}}$，向量$\boldsymbol{\beta}=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$。

（1）将向量$\boldsymbol{\beta}$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

（2）求$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$，$n\in\mathbb{N}$。

5.3（知识点 48、30，难度系数 0.6）　设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$分别为$\boldsymbol{A}$的属于特征值-1、1 的特征向量，向量$\boldsymbol{\alpha}_3$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

5.4（知识点 48，难度系数 0.6）　设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，有 3 个不同的特征值λ_1、λ_2、λ_3，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$依次是属于特征值λ_1、λ_2、λ_3的特征向量，令$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，若$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$，求$\boldsymbol{A}$的特征值并计算行列式$|2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$。

5.5（知识点 48，难度系数 0.6，2009 年考研数学一真题）　若 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$满足$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，其中$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{\alpha}$的转置，则矩阵$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$的非零特征值为_______。

5.6（知识点 49，难度系数 0.4）　求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$的特征值与特征向量。

5.7（知识点 49，难度系数 0.6）　设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&1&-1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$的特征向量，求$a$、$b$的值并证明$\boldsymbol{A}$的任一特征向量均能由向量$\boldsymbol{\alpha}$线性表示。

5.8（知识点 50，难度系数 0.4）　设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为n阶矩阵，且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，$\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵，则（　）。

（A）$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$

（B）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值与特征向量

（C）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都相似于一个对角阵

（D）对任意常数t，$\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}-t\boldsymbol{E}$相似

5.9（知识点 51，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，且满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

（1）求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}$；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

（3）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 为对角矩阵。

5.10（知识点 51，难度系数 0.6）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问 k 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化?并求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和相应的对角阵。

5.11（知识点 51，难度系数 1.0）　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，若 λ_1、λ_2、λ_3 为 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个不同特征值。证明：

（1）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（2）存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$、$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 同为对角阵。

5.12（知识点 51，难度系数 0.4，2004 年考研数学一真题）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化。

5.13（知识点 52，难度系数 0.4）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵。

5.14（知识点 52、48，难度系数 0.8）　设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，试求行列式 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的值。

5.15（知识点 52、60，难度系数 0.6）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$，其中 k 为实数，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，并求 k 为何值时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

5.16（知识点 53，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^3=-\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并说明理由。

5.17（知识点 53，难度系数 0.4）　已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^5$。

5.18（知识点 53，难度系数 0.4）　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{10}$。

5.19（知识点 53，难度系数 0.6）　设 3 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6,\ \lambda_2=-6,\ \lambda_3=0$，对应 $\lambda_1=6,\ \lambda_3=0$ 的特征向量分别为 $(1,a,1)^{\mathrm{T}}$、$(a,a+1,1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

第 5 篇综合测试题详解

5.1 解析： 概念题。四个选项均为对 $k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}$ 是否为特征向量进行判断，因此干脆先假设 $k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，对应的特征值为 λ，然后再看需要什么条件。

此时有 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta})=k_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}+k_2\lambda_2\boldsymbol{\eta}=\lambda(k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta})$，即 $k_1(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{\xi}+k_2(\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 λ_1、$\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 的特征向量，所以线性无关，故
$k_1(\lambda_1-\lambda)=0$，$k_2(\lambda_2-\lambda)=0$，
当 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$ 时，可得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，与已知 λ_1、λ_2 不相同矛盾。因此 $k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。选（C）。

解：（C）。

5.2 解析：（1）常规做法，解方程组即可;（2）利用（1）的结论将 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$ 展开，再考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的高次幂对应的特征值。

解：（1）将向量 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即求解方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}\text{。}$$

因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$。

（2）$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n\left(2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\right)=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3$

$$=2\lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_1-2\lambda_2^n\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-2^{n+1}\boldsymbol{\alpha}_2+3^n\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}\text{。}$$

5.3 解析： 根据线性相关性的概念，先设出等式，再左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，这样可以得到两个等式。结合特征值与特征向量的概念式，对特征向量组进行线性相关性的判断，这是常见的技巧。

证明： $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值−1、1 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$。设有一组实数 k_1,k_2,k_3 使得下式成立：

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}\text{。}\tag{5.3.1}$$

式（5.3.1）左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 可得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}\text{。}\tag{5.3.2}$$

式（5.3.1）减式（5.3.2）得 $2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是属于不同特征值的特征向量，所以线性无关，故 $k_1=k_3=0$，代入式（5.3.1）得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$。因为特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_2=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

5.4 解析：本题的关键是用到不同特征值对应的特征向量线性无关的结论，最后还要结合特征值的性质 48.1.1（2）。

解：由已知可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\lambda_1^3\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^3\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^3\boldsymbol{\alpha}_3。$$

由已知 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$，立即可得 $\lambda_1^3\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^3\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^3\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$(\lambda_1^3-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2^3-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_3^3-\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}。$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 依次是属于 3 个不同的特征值 λ_1、λ_2、λ_3 的特征向量，所以它们线性无关。因此 $\lambda_1^3-\lambda_1=\lambda_2^3-\lambda_2=\lambda_3^3-\lambda_3=0$，也就是说 λ_1、λ_2、λ_3 是方程 $x^3-x=0$ 的三个单根，解此方程得到 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值 0、1、-1。根据特征值的性质 48.1.1（2）得 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值为 -3、-1、-5。故 $|2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=(-3)\times(-1)\times(-5)=-15$。

5.5 解析：此题有一定技巧，利用例 51.3.3 中的“**乾坤大挪移**”的方法立即可得结果。

因为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，而 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)=2\boldsymbol{\beta}$，所以 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 2。

解：2。

5.6 解析：本题考查特征值与特征向量的基本求法。通常是先求特征值，再求特征向量。

解：根据 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}17-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 14-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 14-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-18)^2(\lambda-9)$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=18,\quad \lambda_3=9。$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=18$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-18\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得

$$(\boldsymbol{A}-18\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -4 & -4\\ -2 & -4 & -4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}。$$

得到基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$。故属于 $\lambda_1=\lambda_2=18$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_1$、$k_2$ 为不全为零的任意常数）。

当 $\lambda_3=9$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得

$$(A-9E)=\begin{pmatrix}8&-2&-2\\-2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

得到基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$。故属于 $\lambda_3=9$ 的特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$（k_3 为非零的任意常数）。

5.7 解析：将概念式 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 展开即可得到 3 个未知数 3 个方程组成的线性方程组，据此可求出 a、b、λ的值。再按照常规做法可求出 A 线性无关的特征向量。

解:设 λ 为 A 对应 $\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值，即 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即 $\begin{pmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，展开得 $a-3=\lambda$，$b+2=\lambda$，$1=-\lambda$，故 $\lambda=-1$，$a=2$，$b=-3$。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&\lambda^2-2\\5&-3-\lambda&-7-5\lambda\\-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-[(7+5\lambda)-(\lambda^2-2)(-3-\lambda)]=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3。$$

故 A 的特征值为 $\lambda=-1$（三重）。

当 $\lambda=-1$ 时，解 $(A+E)x=\mathbf{0}$，因为

$$A+E=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&-2&-2\\-1&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}$为其基础解系，A 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}$（k 为非零的任意常数），即 A 的任一特征向量均能由 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性表示。

5.8 解析：根据 A 与 B 相似，有 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，但矩阵等式 $A-\lambda E=B-\lambda E$ 未必成立，（A）错误；若两个矩阵相似，则特征值相同，但其特征向量未必相同，（B）错误；A 与 B 都未必可以相似对角化，（C）错误。根据排除法选（D）。

对于（D），设 A 与 B 相似，则存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$ 成立。从而

$$P^{-1}(A-tE)P=P^{-1}AP-P^{-1}tEP=B-tE,$$

所以对任意常数 t，矩阵 $A-tE$ 与 $B-tE$ 相似。（D）正确。

解:（D）

5.9 解析：（1）根据矩阵分块的原理将已知的 3 个等式“组装”成矩阵；（2）注意矩阵 A 与 B 相似，因为相似矩阵的特征值相同，所以只需求出 B 的所有特征值即可；（3）常规做法。

解：（1）因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$。

（2）因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，所以 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，它们有相同的特征值。

由 $\left|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)$，可知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$。

（3）对矩阵 $\boldsymbol{B}$，当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。因为

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$。

当 $\lambda_3=4$ 时，解 $\left(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。因为

$$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$。令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}。$$

5.10 解析：此题的关键是判断 $\boldsymbol{A}$ 的每个 k 重特征值对应的线性无关的特征向量的数目是否为 k.

解：因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\-k&-1-\lambda&k\\4&2&-3-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1+c_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-2\\0&-1-\lambda&k\\1-\lambda&2&-3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-2\\0&-1-\lambda&k\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+1)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$。

为了 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 必须对应两个线性无关的特征向量。下面解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4&2&-2\\-k&0&k\\4&2&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&-1\\-k&0&k\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $3-R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2$，即 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1$，因此当 $k=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 方可相似对角化，此时得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}。$$

对于 $\lambda_3=1$，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-2&0\\4&2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{P}$ 为相似变换阵，相应的对角阵为 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$。

5.11 解析：（1）对 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 因式分解，可得两个互逆矩阵，利用互逆矩阵乘法可交换的性质，可证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。（2）难度大，思路是通过 $\boldsymbol{A}$ 可对角化转换为 $\boldsymbol{B}$ 可对角化。需要灵活运用矩阵分块的方法将相似变换式“拆解”。

证明：（1）由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵，从而有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$，展开并整理后可得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

（2）由 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值 λ_1、λ_2、λ_3，则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，设 3 个特征值对应的线性无关的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1$、$\boldsymbol{\xi}_2$、$\boldsymbol{\xi}_3$，则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)。$$

上式两端左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 得

$$\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)。$$

即 $\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，运用分块矩阵的乘法规则，得

$$(\boldsymbol{AB\xi}_1,\boldsymbol{AB\xi}_2,\boldsymbol{AB\xi}_3)=(\boldsymbol{B\xi}_1,\boldsymbol{B\xi}_2,\boldsymbol{B\xi}_3)\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\lambda_1\boldsymbol{B\xi}_1,\lambda_2\boldsymbol{B\xi}_2,\lambda_3\boldsymbol{B\xi}_3)。$$

于是有 $\boldsymbol{AB\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{B\xi}_i$，$i=1,2,3$。

若 $\boldsymbol{B\xi}_i\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B\xi}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量，又 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的单根，所以 $\boldsymbol{A}$ 对应 λ_i 的线性无关的特征向量只有一个，即有 $\boldsymbol{B\xi}_i=\mu\boldsymbol{\xi}_i$，$\mu\neq0$，此时 μ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}_i$ 为对应的特征向量；若 $\boldsymbol{B\xi}_i=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征向量。总之无论哪种情形，$\boldsymbol{\xi}_i$（i=1,2,3）都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，故 $\boldsymbol{B}$ 必可相似对角化。令 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\right)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$、$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 同为对角阵。

5.12 解析：先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，再判断其二重根是否对应有两个线性无关的特征向量，从而确定 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化。

解：$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-3\\-1&4-\lambda&-3\\1&a&5-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda&\lambda-2&0\\-1&4-\lambda&-3\\1&a&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 4-\lambda & -3\\ 1 & a & 5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

（1）若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$ 含有根 $\lambda=2$，因此有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$。

当 $a=-2$ 时，可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2、2、6，因为矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ 的秩为 1，故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有 2 个，从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。

（2）若 $\lambda=2$ 不是特征方程的重根，已知特征方程有一个二重根，因此 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 可化为完全平方的形式，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$。

当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2、4、4，因为矩阵 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -\dfrac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化。

注：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是，对于 $\boldsymbol{A}$ 的任意 k_i 重特征根 λ_i，恒有 $n-R(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=k_i$，而单特征根一定只有一个线性无关的特征向量。

5.13 解析：先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，把特征向量正交单位化，即可构造出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，所得对角阵中对角线上的元素即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

解：$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2+c_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ -2 & 2-\lambda & 4\\ 2 & 2-\lambda & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ -2 & 2-\lambda & 4\\ 4 & 0 & -6-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2(\lambda+7),$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$。

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(2,0,1)^{\mathrm{T}}$。

对向量组 $(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 正交化，得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}。$$

再单位化，得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}。$$

对于 $\lambda_3=-7$，解 $(\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，再单位化，得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-7\end{pmatrix}$$

为对角阵。

5.14 解析：此题较难。计算行列式时最好把矩阵的加减法转化为矩阵的乘法和逆，这样容易用到矩阵乘法的行列式的性质。由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以可考虑进行相似对角化，化简矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 之后再计算 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$。

解：设 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量。由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，两边右乘特征向量 $\boldsymbol{\xi}$，得 $\lambda^2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，即 $\left(\lambda^2-\lambda\right)\boldsymbol{\xi}=0$，可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 或 0。又 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，且秩为 r，故存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 是 r 阶单位阵。从而

$$\begin{aligned}|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\left|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{P}\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\right|\\&=|\boldsymbol{P}|\left|\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}\right)\right|\left|\boldsymbol{P}^{-1}\right|=|\boldsymbol{P}|\left|\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}\right)\right||\boldsymbol{P}|^{-1}\\&=|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{E}_{n-r}\end{vmatrix}=2^{n-r}。\end{aligned}$$

注：一般对实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 用正交变换对角化，这是因为正交变换有许多好的性质，但

此题只要对它作一般的相似对角化即可达到目的。

5.15 解析：此题并不能直接求得与 $\boldsymbol{B}$ 相似的对角阵。注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，必正交相似于某一对角阵，求出此对角阵后，再利用 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系式 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 即可设法推导出所求与 $\boldsymbol{B}$ 相似的对角矩阵 $\boldsymbol{\varLambda}$。

解：由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)^2$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$。

注意 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，故必存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\varLambda}_1$，其中 $\boldsymbol{\varLambda}_1=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varLambda}_1\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$。

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=(k\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varLambda}_1\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^2=[\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\varLambda}_1)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}]^2=\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\varLambda}_1)^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}。\end{aligned}$$

所求与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似的对角矩阵为 $\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}$。

当 $k\neq -2$ 且 $k\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\varLambda}$ 的对角元即 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全为正数，此时 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

注：当直接通过相似变换将某一矩阵化为对角阵比较困难时，可借助与之关联的其他矩阵的对角阵来求。

5.16 解析：遇到实对称阵，第一反应是可正交变换对角化，因为正交变换下，矩阵既等价，又相似，且合同，所以变换后的矩阵保持矩阵的秩、特征值与惯性指数不变，也就是说，正交变换最大限度地保持了矩阵的特性。此题对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变换后，$\boldsymbol{A}^3$ 也相应地变换，然后找到变换前后矩阵的对应关系即可。

解：因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\varLambda}$，其中 $\boldsymbol{\varLambda}$ 为对角阵。上式两边作 3 次幂得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\varLambda}^3$。又因为 $\boldsymbol{A}^3=-\boldsymbol{E}$，所以

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{E}。$$

因此 $\boldsymbol{\varLambda}^3=-\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{\varLambda}=-\boldsymbol{E}$，代入式 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\varLambda}$ 得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$。

5.17 解析：一般的做法是利用矩阵的相似，通过矩阵的相似对角阵求原矩阵。此题略有变化，$\boldsymbol{B}$ 虽然非对角阵，做法也一样。

因为 $\boldsymbol{B}^5=\boldsymbol{B}$，故

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\4&0&-1\end{pmatrix}。$$

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&3&-1\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{B}^4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{B}^5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&5&-1\end{pmatrix}。$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&5&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\14&-5&-1\end{pmatrix}。$$

5.18 解析：直接计算 $\boldsymbol{A}^{10}$ 太麻烦，观察出 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，因此必可相似对角化，只要将其相似对角化，即可反过来求 $\boldsymbol{A}^{10}$。此题与例 53.3.2 完全类似。

解：根据 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-5)$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=5$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_3=5$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即有 $\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，解得对

应的线性无关特征向量为$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。

令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则可求得$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，因此$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$。所以

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&5^{10}\\0&1&5^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1+5^{10}}{2}&\frac{5^{10}-1}{2}\\0&\frac{5^{10}-1}{2}&\frac{5^{10}+1}{2}\end{pmatrix}。$$

5.19 解析：根据实对称矩阵不同的特征值对应的特征向量正交，可得$\lambda_1=6$，$\lambda_3=0$的特征向量和参数a，由特征值和特征向量反过来可求矩阵。

解：由实对称阵特征向量的性质可知，$\boldsymbol{A}$ 对应特征值$\lambda_1=6$，$\lambda_3=0$的特征向量$(1,a,1)^{\mathrm{T}}$、$(a,a+1,1)^{\mathrm{T}}$正交，故$a+a(a+1)+1=0$，解得$a=-1$，故$\boldsymbol{A}$的对应$\lambda_1=6$，$\lambda_3=0$的特征向量分别为$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 、 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

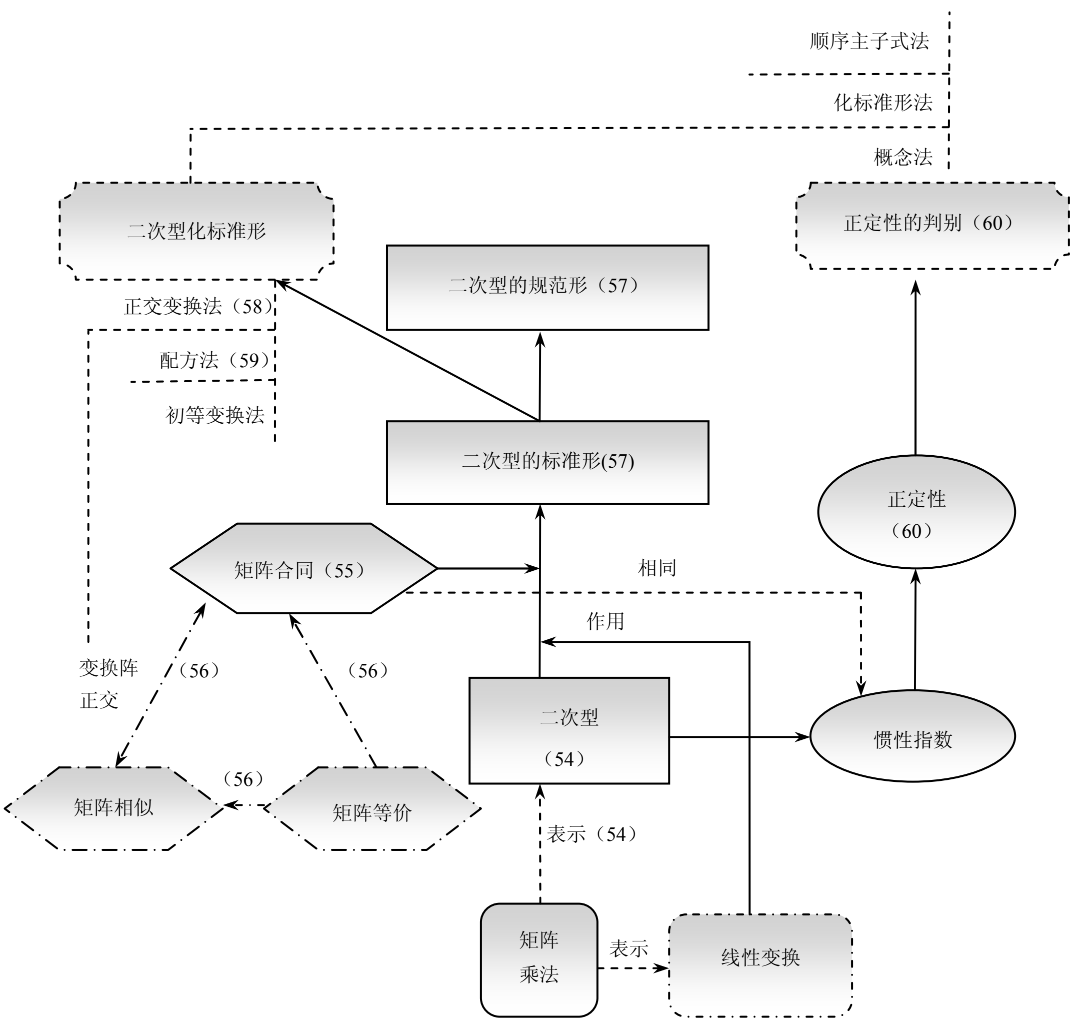
设$\boldsymbol{A}$对应$\lambda_2=-6$的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则它与$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$、$(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$均正交，故得到方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\-x_1\quad\ +x_3=0\end{cases}$，解之得基础解系为$(1,2,1)^{\mathrm{T}}$。

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}6&&\\&-6&\\&&0\end{pmatrix}$，故

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&1\\-4&-2&-4\\1&-4&1\end{pmatrix}$。

第 6 篇　二次型

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

第 6 篇

综　　述

二次型是一个二次齐次式，二次型的矩阵表示及其化标准形是矩阵的两个典型的应用。

本篇内容分二次型的矩阵表示[54]、二次型化标准形[57]及二次型的正定性判别三部分。二次型的矩阵表示为矩阵分块的“逆应用”，即将一个二次齐次式根据矩阵分块的原理“组装”成矩阵乘法的形式：$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，这使得用矩阵来解决二次型的问题成为可能。最可贵的是，这里的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与二次型一一对应，且它是一个对称阵。二次型在非退化的线性变换下对应矩阵的变换为合同变换[55]，惯性指数为合同变换下的不变量。在合同变换下，二次型可以简化为标准形和规范形，其中标准形非唯一而规范形是唯一的。教材中介绍了两类二次型化标准形的方法，较简单的一类为配方法[59]，较复杂的一类是通过正交变换化标准形。特别要注意的是，正交变换化标准形“借用”了相似变换的方法，即先求矩阵的特征值与特征向量，然后将所有的特征向量规范正交化，构造出正交阵作为相似变换矩阵。要注意的是，矩阵的合同变换 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与矩阵的相似变换 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 之间没有必然的联系，但是在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵时，有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$，这时候两者就一致了。也就是说，正交变换化二次型借用了相似变换之后，结论变得非常好：在正交变换下，可保持向量的长度与向量间的夹角不变[58]。

二次型正定性的理论基础为合同变换下矩阵的不变量即惯性指数不变。二次型的正定性的判别法主要有三种：概念法、化标准形法和顺序主子式法[60]。

至此，可总结矩阵等价、矩阵相似与矩阵合同三个概念之间的联系。首先，矩阵相似与矩阵合同均为矩阵等价的特例。矩阵相似与矩阵合同之间没有必然的联系，但在相似变换阵为正交阵时两者一致。利用它们之间的联系也可以解决一些问题[56]。

注：文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握，并根据自己的实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

更多资源请扫二维码：

知识点 54　二次型及其矩阵表示

更多资源请扫二维码:

54.1　概念、结论

1．概念

定义 54.1.1　二次型　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,\ n}x_{n-1}x_n \qquad (54.1)$$

称为二次型。

定义 54.1.2　复二次型与实二次型　当式（54.1）中的 a_{ij} 为复数时，f 称为复二次型；当 a_{ij} 为实数时，f 称为实二次型。

2．结论

结论 54.1.1　二次型的矩阵表示　二次型（54.1）唯一地对应对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型（54.1）的矩阵，二次型（54.1）称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型。此二次型可以表示为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的形式。

54.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 55
- **综述**：二次型是一个二次齐次式。将二次型化成矩阵乘法式用到了矩阵分块的技巧，严格地说，是将矩阵的分块“反过来用”，即将一个不是矩阵的二次齐次式按照矩阵分块的运算法则“组装”成一个矩阵，我们称此过程为矩阵的“组装”。这一点大家可以通过教材慢慢体会，这个过程的思路对综合题的求解很有帮助。因为二次型与对称矩阵一一对应，所以只要研究清楚对称矩阵的性质，即可掌握有关二次型题型的解法。

54.3　经典例题精解巧析

例 54.3.1（难度系数 0.2）　下列 $f(x,y,z)$ 为二次型的是（　）。

（A）ax^2+by^2+cxz　　　　（B）$ax+by^2+cxz$

（C）$axy+byz+czx+d$　　　　（D）$ax^2+by^2+cz^2x$

解析： 考查二次型的定义 54.1.1。根据二次型是 n 元二次齐次函数，显然只有选项（A）正确。

解：（A）。

例 54.3.2（难度系数 0.2）　下列矩阵中，不可能是二次型矩阵的为（　）。

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$　　　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

解析： 概念题。根据二次型的矩阵是对称矩阵即可判断。显然只有（D）中的矩阵非对称矩阵。

解：（D）。

例 54.3.3（难度系数 0.6，跨知识点 55）　设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 是满秩的 n 阶实对称矩阵，A_{ij} 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$。

（1）记 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$，试写出二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式；

（2）判断二次型 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形与 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形是否相同，并说明理由。

解析：（1）关键是写出二次型的矩阵，注意这里用到了 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的结构特点；（2）只需判定二次型 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应的矩阵是否合同，因为合同的矩阵当且仅当它们有相同的规范形。

解：（1）因为 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 是满秩的 n 阶实对称矩阵，所以 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称矩阵，同理可得 $\boldsymbol{A}^*$ 是实对称矩阵，即 $A_{ij}=A_{ji}$。二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

因此二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$。

（2）因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。

另由于二次型可通过非退化的线性变换化规范形，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{E}$，二次型 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形相同。

例 54.3.4（难度系数 0.4，跨知识点 49）　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2，求 c 及二次型的矩阵的特征值。

解析:此题考查二次型与矩阵的对应关系，这里求矩阵的特征值为常规题型。

解：二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|=24(c-3)$。因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是得 $c=3$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&6-\lambda&-6\\\lambda-4&\lambda-5&3\\0&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)。$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=9$。

知识点 55　矩阵的合同

更多资源请扫二维码:

55.1　概念

定义 55.1.1　矩阵合同　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同。

55.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 54，知识点 56
- **综述**：矩阵合同是矩阵等价的特殊情形，考研题中常常考查对其概念的运用。要注意在非退化线性变换下二次型的矩阵是合同的。矩阵在合同变换下的不变量是其惯性指数（参见定理 60.1.3），此结论在本知识点中很有用，且它是判断矩阵合同的充分必要条件。此知识点的题目均属于跨知识点的题型。

55.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 19.3.2，例 54.3.3

例 55.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 49）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为（　）

（A）$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

解析： 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的惯性指数。而这里 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，通过求特征值来确定对称阵的惯性指数比较方便，具体解释请看招数 55.3.1。

本题可求得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3 和 -1，在所有选项中，仅（D）中矩阵的特征值为 3 与 -1，满足题目要求。

解：（D）。

招数 55.3.1　怪招：对称矩阵通过求特征值来求惯性指数。

假若利用矩阵合同变换对角化来求惯性指数，对于例 55.3.1 要花费不少时间。原本特征值与矩阵相似直接关联，而与矩阵合同似乎没有联系，但是为什么可以用它来求惯性指数呢？其实这是对称阵特有的“权利”。因为对称阵可通过正交变换化标准形，且标准形中对角线上的元素即为矩阵的特征值，此时变换前后的矩阵也是合同的，所以只需要求出矩阵所有的特征值，即可判断惯性指数。

例 55.3.2（难度系数 0.4，跨知识点 57，60）　实对称方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 合同，则下列结论不成立的是（　）。

（A）$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 同符号　　（B）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的正惯性指数

（C）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的规范形　　（D）$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 同值

解析： 此题要求熟练掌握矩阵合同的概念及性质。根据概念，先设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}$ 可逆。

（A）因为 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|^2$，所以 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 同符号，（A）正确，但是 $|\boldsymbol{P}|^2$ 未必为 1，所以 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 未必同值，即（D）的结论不成立，故选（D）。

对于（B）、（C），根据矩阵合同的基本性质显然成立。

解：（D）。

例 55.3.3（难度系数 0.6，跨知识点 60）　如果把 n 阶实对称矩阵按合同分类，即两

个实 n 阶对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有_______类。

解析：根据合同的矩阵必等价可知合同的矩阵有两个不变量：秩与惯性指数，故按照秩和正惯性指数来分类即可。

秩为 0 的矩阵：仅 1 类；

秩为 1 的矩阵：正惯性指数分别为 1、0，共 2 类；

秩为 2 的矩阵：正惯性指数分别为 2、1、0，共 3 类；

秩为 3 的矩阵：正惯性指数分别为 3、2、1、0，共 4 类；

…

秩为 n 的矩阵：正惯性指数分别为 n、$n-1$、…、1、0，共 $n+1$ 类。

因此分类的总数目为 $1+2+3+\cdots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类。

解：$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$。

招数 55.3.2　绝招：利用矩阵的“番号”对矩阵进行分类研究。

在战争中，两个战友只需要知道对方部队的番号，就能明确对方属于哪一个军、哪一个师……部队的番号极大地方便了作战指挥。矩阵的秩、特征值与惯性指数这三类不变量可类比于部队的“番号”，目的是便于分类研究：在哪种变换下对应哪种不变量，只要此不变量相同的矩阵就可以归为一类来研究（注意特征值相同的矩阵未必相似，而在能相似对角化的前提之下才能归为一类）。又因为同一类矩阵在某方面有着相同的性质，所以在同一类矩阵中，只需要研究其中最简单的矩阵，便可把握此类矩阵的主要特性。

知识点 56　矩阵的等价、相似与合同的关系

更多资源请扫二维码：

56.1　结论

结论 56.1.1　矩阵的等价、相似与合同的关系

（1）矩阵相似必等价；矩阵合同必等价。

（2）矩阵相似与矩阵合同两个概念没有蕴含关系，在变换矩阵为正交阵下二者一致。

56.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 55
- **综述**：本知识点讨论矩阵的“三大关系”之间的联系。三大关系中矩阵等价的外延最宽，它涵盖了矩阵相似和矩阵合同，换个角度看，矩阵的秩既是矩阵等价的不变量，同时也是矩阵相似与矩阵合同的不变量。矩阵相似与矩阵合同的概念联系并不紧密，产生的背景也截然不同，它们概念的外延是相交的关系。只有在变换矩阵是正交阵之下，矩阵相似与矩阵合同才一致。矩阵相似的不变量是其特征值，矩阵合同的不变量是其惯性指数，通过不变量可以判断矩阵之间的关系。特别注意除矩阵相似外，矩阵等价与矩阵合同均可以通过不变量来判断，这是因为矩阵等价与矩阵合同必可对角化，而并不是所有矩阵均可通过相似变换对角化。

56.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 19.3.1

例 56.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 18） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 作行变换 $r_i + kr_j\ (k \neq 0)$ 后再作列变换 $c_i + kc_j$ 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（ ）。

（A）等价、相似且合同　　　　（B）等价、合同但不相似

（C）相似、合同但不等价　　　　（D）等价、相似但不合同

解析：先考查矩阵初等变换与初等矩阵的对应关系，再分别根据矩阵等价、相似与合同的概念判定。

选择（B）。理由如下：因为 $\boldsymbol{A} \overset{r_i+kr_j}{\sim} \boldsymbol{C} \overset{c_i+kc_j}{\sim} \boldsymbol{B}$，即对应 $\boldsymbol{E}(ij(k))\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(ji(k)) = \boldsymbol{B}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价；因为 $\boldsymbol{E}(ji(k))^{-1} = \boldsymbol{E}(ji(-k)) \neq \boldsymbol{E}(ij(k))$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似；又因为 $\boldsymbol{E}(ji(k))^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}(ij(k))$，即 $\boldsymbol{E}(ji(k))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(ji(k)) = \boldsymbol{B}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同。

解：（B）。

注意： $c_i + kc_j$ 对应右乘的初等矩阵不是 $\boldsymbol{E}(ij(k))$ 而是 $\boldsymbol{E}(ji(k))$！

例 56.3.2（难度系数 0.4，跨知识点 60） 下列说法错误的是（ ）。

（A）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，若存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 合同。

（B）$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且对任意 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$。

（C）两个 n 阶实对称矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩。

（D）实对称矩阵的秩 R 和符号差 s 具有相同的奇偶性。

解析：概念题。

若令 $A=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -3 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $R(A)=R(B)$，但由于两个矩阵的惯性指数不同，即 A、B 不合同，故（C）错误，选（C）。

下面补充说明其他选项：（A）为矩阵合同的概念，正确；（D）中秩 R 为正惯性指数 p 与负惯性指数 q 的和，即 $R=p+q$，而符号差 s 为正惯性指数 p 与负惯性指数 q 的差，即 $p-q=s$，因为 $p+q=p-q+2q$，即 $R=s+2q$，所以 R 与 s 奇偶性相同；（B）稍难，简易的做法是分别令

$$x_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},x_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,x_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

再利用矩阵分块的原理“组装”成矩阵等式 $EAE=O$，即有 $A=O$。

解：（C）。

招数 56.3.1　险招：选择题中的“抓住一点、不及其余”。

从例 56.3.2 的解析中发现，有些选择题无须逐个判断选项即可得出结果。对于“下列说法错误的是”与“下列说法正确的是”这两种问法，一种简便的解题方法就是“抓住一点、不及其余”，即只要确定一个符合题意的选项即可，其他的选项不用管。但这里有一个要求，就是对此选项中的概念、逻辑要十分清楚，不然会有出错风险。

例 56.3.3（难度系数 0.8）　判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 是否等价、相似及合同。

解析：两个矩阵等价当且仅当它们的秩相同。一般来说，两个矩阵特征值相同未必相似，但是对于对称阵，由于对称阵必能对角化，根据矩阵相似关系的传递性，上述结论成立。因此判断相似时只需要看特征值。

另外，实对称阵 A 与 B 相似 $\Rightarrow A$ 与 B 有相同的特征值

$\Rightarrow x^{\mathrm{T}}Ax$ 与 $x^{\mathrm{T}}Bx$ 有相同的正、负惯性指数

$\Rightarrow A$ 与 B 合同。

因此对于实对称阵，由矩阵相似即可推出矩阵合同。

解：易求得 $R(A)=R(B)=1$，因为 A 与 B 的秩相等，所以 A 与 B 等价。

根据 $|\lambda E-A|=\lambda^3-3\lambda^2$，可知 A 的特征值为 3、0、0。又因为 A 是实对称阵，所以 A 必能通过正交变换相似对角化，且它相似于

$$B=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}。$$

由于正交变换即为合同变换，所以 A 与 B 也合同。

本题相似、合同、等价均成立。

招数 56.3.2　险招：用各类变换的不变量来判断矩阵间的三大关系

判断矩阵的等价、合同与相似，一般不要直接对矩阵去做各类变换，这样太麻烦。可以利用矩阵在各类变换下的不变量来判断它们。此招有点“险”，因为会有“暗礁”。如利用矩阵的秩相等可判断等价，利用矩阵的惯性指数可判断合同，但仅根据矩阵的特征值相等不能完全判断出矩阵相似，这要看两个矩阵能否对角化。对实对称阵而言，利用矩阵的特征值符号相同即可判断矩阵合同（知识点 55 中的“怪招”中已经有解释）。

知识点 57　二次型的标准形

更多资源请扫二维码：

57.1　概念

定义 57.1.1　二次型的标准形　若 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$，这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形（或法式）。

定义 57.1.2　二次型的规范形　如果二次型的标准形的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 只在 1、−1、0 三个数中取值，也就是 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_q^2$，这种标准形称为二次型的规范形。

57.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 55
- **综述**：正如矩阵的等价及相似均有标准形一样，矩阵的合同也有标准形，且只要是方阵，必可以通过合同变换化标准形。这一点和矩阵等价很类似，只是矩阵相似变换化对角形是有条件的。二次型的标准形不是唯一的，一般的题型要求化标准形即可。由于二次型在合同变换下的不变量是惯性指数，所以其规范形对应矩阵对角线上的元素仅有 1、−1、0 三种取值情况，且其个数是确定的，即规范形是唯一的。

57.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 55.3.2

例 57.3.1（难度系数 0.4，跨知识点 59 ）　实二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+3x_2^2+8x_3^2+2x_1x_2+8x_2x_3$$

的规范形为（　）。

（A）$y_1^2+2y_2^2+y_3^2$　　　　（B）$y_1^2+y_2^2$

（C）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　　　（D）$y_1^2+2y_2^2$

解析：利用配方法做线性变换。

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+3x_2^2+8x_3^2+2x_1x_2+8x_2x_3\\&=(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2)+(2x_2^2+8x_3^2+8x_2x_3)\\&=(x_1+x_2)^2+2(x_2+2x_3)^2\text{。}\end{aligned}$$

令 $y_1=x_1+x_2$，$y_2=x_2+2x_3, y_3=x_3$，则 $f=y_1^2+2y_2^2$。此时千万不能选（D）！因为还没有化位规范形。再令 $y_1=z_1$，$\sqrt{2}y_2=z_2$，$y_3=z_3$ 即得 $f=z_1^2+z_2^2$。所以选（B）。

解：（B）。

例 57.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 58）　二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$$

经正交变换化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=3y_1{}^2+3y_2{}^2+by_3{}^2$，求 a、b。

解析：抓住正交变换下的不变量即矩阵的特征值，再利用特征值的性质来求解。

解：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&a\\-2&a&1\end{pmatrix}$，因为此二次型经过正交变换后的标准形为

$$g(y_1,y_2,y_3)=3y_1{}^2+3y_2{}^2+by_3{}^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3、3、b。

由特征值的性质得

$$6+b=1+1+1,\ |\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&a\\-2&a&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0&0\\-2&0&a+2\\-2&a+2&0\end{vmatrix}=2(a+2)^2=0,$$

解得 $b=-3$，$a=-2$。

例 57.3.3（难度系数 0.8，2009 年考研数学一真题）　设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3,$$

（1）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（2）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

解析：（1）求特征值用常规做法即可。（2）先根据（1）求得二次型 f 的惯性指数，再根据 f 的规范形给出的信息使得二者达到一致即可。

解：（1）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$。因为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix}\lambda-a & 1\\ 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \lambda-a\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)\left[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1\right]-\left[0+(\lambda-a)\right]$$

$$=(\lambda-a)\left[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2\right]$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$。

（2）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值为正，一个为 0。下面分情况讨论。

① 若 $\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$，$\lambda_3=1$，不符合题意；

② 若 $\lambda_2=0$，即 $a=2$，则 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合题意；

③ 若 $\lambda_3=0$，即 $a=-1$，则 $\lambda_1=-1<0$，$\lambda_2=-3<0$，不符合题意。

综上所述，$a=2$。

知识点 58　用正交变换化二次型为标准形

更多资源请扫二维码:

58.1　定理

定理 58.1.1　任给二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

推论　任给 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总有非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，使 f（$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$）为规范形。

58.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**5
- **最关联知识点：**知识点 57
- **综述：**二次型的矩阵为实对称阵。根据知识点 52，先将二次型对应实对称阵，再将实对称阵通过正交变换化标准形，即可解出此知识点的题目。要注意二次型与实对称矩阵的一一对应，还必须明白这里其实“借用”了相似变换来求合同变换，用的是“在正交变换下，相似变换与合同变换一致”的结论。

58.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 57.3.2

例 58.3.1（难度系数 0.4）　已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，试用正交变换将之变成标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

解析：对比知识点 52 的相似变换对角化的题目，只是增加了两个步骤，即在前面增加了将二次型对应矩阵，在后面增加了将对角形矩阵对应二次型的标准形。

解：二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，由

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-5\right),$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$。

当 $\lambda_1=-1$ 时，$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_2=2$ 时，$\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_3=5$ 时，$\left(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$。

于是所用的正交变换矩阵为 $\boldsymbol{P}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix}$，对角形为 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，所求二次型的标准形为 $f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

例 58.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 48）　设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0),$$

对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12。

（1）求 a、b 的值；

（2）利用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交变换矩阵。

解析：基础题型，考查特征值的基本性质和正交变换化标准形。计算量稍大，这正符合考研题目的特点。

解：（1）二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$。由已知条件及特征值的性质，得

$$a+2+(-2)=1，\left|\boldsymbol{A}\right|=2(-2a-b^2)=-12，$$

故$a=1$，$b=2$。

(2)因为$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+3)$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3。$$

对$\lambda_1=\lambda_2=2$，解$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得基础解系为$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$、$(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，分别单位化得$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$、$\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^{\mathrm{T}}$。

对$\lambda_3=-3$，解$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得基础解系为$(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$，单位化得$\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$。

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{P}$即为所求的正交变换矩阵，所用的正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$后，原二次型化为如下标准形：

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2。$$

例 58.3.3（难度系数 0.8，2005 年考研数学一真题）　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$$

的秩为 2。

（1）求a的值；

（2）求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形；

（3）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解。

解析：（1）根据二次型的秩为 2，可知对应矩阵的行列式的值为 0，从而可以求出a的值；（2）常规问题，先求出二次型矩阵的特征值和特征向量，再正交化、单位化即可得到所需正交变换；（3）利用（2）的结果，通过二次型的标准形求出$\boldsymbol{y}$的解，然后通

过线性代换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 转化为 $\boldsymbol{x}$ 的解即可。

解：（1）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

由二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 2，可知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$，解得 $a=0$。

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，易得其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$。

当 $\lambda_3=0$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$。

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，所以直接将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}。$$

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 & \boldsymbol{\eta}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}$ 即为所求的正交变换矩阵，经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，原二次型可化为如下标准形：

$$f=2y_1^2+2y_2^2.$$

（3）令 $f=2y_1^2+2y_2^2=0$，得其解为 $y_1=0,\ y_2=0,\ y_3=k$（k 为任意常数）。从而方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 & \boldsymbol{\eta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}=k\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}c\\-c\\0\end{pmatrix}，其中 c=\frac{k}{\sqrt{2}} 为任意常数。$$

例 58.3.4（难度系数 0.8）　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的

标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$。

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（2）证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵。

解析：（1）因为二次型的矩阵为对称阵，根据对称阵的不同特征值所对应的特征向量正交，即可求出另外两个线性无关的特征向量，从而构造出正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$，再求 $\boldsymbol{A}$；（2）通过 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值均为正数，可证明其正定。

（1）**解：**由二次型在正交变换下的标准形 $y_1^2+y_2^2$，可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=0$，且据正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列对应 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_3=0$，得 λ_3 对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$。

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\left(x_1,x_2,x_3\right)^{\mathrm{T}}$，它与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$，即 $x_1+x_3=0$，其基础解系为 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$、$(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}。$$

则 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

（2）**证明：**因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1、1、0，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 2、2、1，它们均为正数，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵。

例 58.3.5（难度系数 0.4，跨高等数学综合题，2011 年考研数学一真题） 若二次曲面的方程为

$$x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4,$$

经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$________。

解析：《高等数学》中的某些二次曲面对应二次型。根据二次型在正交变换下矩阵的特征值不变的性质可得特征值。再由特征值含 0 可得对应二次型不满秩，从而可解出 a。

解：二次曲面对应二次型 $f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$，它经过正交变换后化为 $f=y_1^2+4z_1^2$。由正交变换保持特征值不变可知该二次型的特征值为 1、4、0。

二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值含 0 可知它不满秩，因此

$$|\boldsymbol{A}|=-a^2-2a-1=0,$$

解得 $a=-1$。

例 58.3.6（难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}$ 是实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值从小到大排列为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明：在约束条件 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 下，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最小值为 λ_1，最大值为 λ_n。

解析：综合题型，较难。注意二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在正交变换下保持向量的长度不变的性质，因此在变换后可对应约束条件 $\|\boldsymbol{y}\|=1$，故问题转化的证明标准形在约束条件 $\|\boldsymbol{y}\|=1$ 下的最值。

证明：因为存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为标准形

$$f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2,$$

故 $f\geqslant\lambda_1\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\lambda_1\|\boldsymbol{y}\|^2$，根据正交变换保持向量的长度不变及 $\|\boldsymbol{x}\|=1$，可得 $\|\boldsymbol{y}\|=1$，易见当 $\|\boldsymbol{y}\|=1$ 时，$f\geqslant\lambda_1$，这说明二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有下界 λ_1。

因为当 $\boldsymbol{y}_1=(1,0,\cdots,0)$ 时，$f=\lambda_1$，设 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_1$，于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_1=\lambda_1\text{，且 }\|\boldsymbol{x}_1\|=\|\boldsymbol{y}_1\|=1\text{。}$$

所以 $f\geqslant\lambda_1$ 中的等号一定成立。

综上可知，λ_1 确实是二次型 f 在约束条件 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 下的最小值，同理可证 λ_n 一定是二次型 f 在约束条件 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 下的最大值。

知识点 59　用配方法化二次型为标准形

更多资源请扫二维码:

59.1　结论

结论 59.1.1　用配方法将二次型化标准形的条件

任意二次型均可通过配方法化为标准形，且二次型的秩不变。

59.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**2
- **最关联知识点：**知识点 57
- **综述：**用配方法化二次型为标准形的过程十分简单，它的原理是多变量“逐个处理”的原则，即先将某一个变量作为变量，其他变量作为常量，将含有此变量的部分

配成平方和的形式之后，其余部分就不再含此变量了，这样变量经过逐个处理之后，剩下的最后一个变量必定是平方的形式。注意此方法对应的变换一定是非退化的。

59.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 57.3.1

例 59.3.1（难度系数 0.4）　设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\left(b>0\right)$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12。

（1）求 a、b 的值；（2）用配方法化该二次型为标准形。

解析：（1）同例 58.3.2;（2）基础题型，考查配方法，每配一次平方项可以“处理”掉一个变量。

解：（1）二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$。根据题意得

$$a+2+(-2)=1,\ \left|\boldsymbol{A}\right|=-4a-2b^2=-12,$$

解得 $a=1$，$b=2$。

（2）$f=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3=(x_1+2x_3)^2+2{x_2}^2-6{x_3}^2$。

令 $\begin{cases} y_1=x_1+2x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1-2y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，于是原二次型的标准形为 $f={y_1}^2+2{y_2}^2-6{y_3}^2$。

例 59.3.2（难度系数 0.4）　用配方法化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形，要求写出相应的线性变换。

解析：配方法是化二次型为标准形中最简单的方法。注意线性变换不是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}$，而是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$，$\boldsymbol{C}$ 可逆。

解：
$$\begin{aligned} f\left(x_1,x_2,x_3\right)&=\left(x_1+x_2+2x_3\right)^2-x_2^2-4x_3^2-10x_2x_3 \\ &=\left(x_1+x_2+2x_3\right)^2-\left(x_2+5x_3\right)^2+21x_3^2. \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+2x_3 \\ y_2=x_2+5x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+3y_3 \\ x_2=y_2-5y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，则原二次型的标准形为

$$f=y_1^2-y_2^2+21y_3^2。$$

所求的线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}。$$

例 59.3.3（难度系数 0.6，跨知识点 60）　通过化标准形的方法判断下列二次型的正定性

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3。$$

解析： 配方化标准形后考查二次型的正惯性指数，若 n 元二次型的正惯性指数为 n，则二次型正定。这里无需作正交变换。注意针对不含平方项的二次型，先利用平方差构造出平方项，然后再配方。

解： 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$，代入原二次型得

$$\begin{aligned}f&=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3\\&=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3。\end{aligned}$$

再对上面的二次型配方，得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(y_1+y_3)^2+4y_2y_3-2y_2^2-2y_3^2\\&=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2。\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\ z_2=y_2-y_3\\ z_3=y_3\end{cases}$，得原二次型的标准形 $f=2z_1^2-2z_3^2$。

因为从二次型的标准形可知其负惯性指数为 1，所以此二次型不是正定的。

例 59.3.4（难度系数 0.8）　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 3，求 y，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角阵。

解析： 先通过特征值的常规求法算出 y。若要使矩阵 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角阵，由于 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$，则只需把二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 化为标准形 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda y}$，所用的非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 中的 $\boldsymbol{P}$ 即为所求。用配方法即可，无需用正交变换。

解： 据 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-3&1&0&0\\1&-3&0&0\\0&0&y-3&1\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=8(2-y)=0$，得 $y=2$。

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$。对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作如下分块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\\&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}，其中\ \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}。$$

则 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^2 & \\ & \boldsymbol{A}_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$。

因此求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角阵的问题等价于求非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 化为标准形的问题。

下面对二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 用配方法化标准形：

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4=x_1^2+x_2^2+5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2+\frac{9}{5}x_4^2\text{。}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=x_2\\y_3=x_3+\dfrac{4}{5}x_4\\y_4=x_4\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2\\x_3=y_3-\dfrac{4}{5}y_4\\x_4=y_4\end{cases}$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&-\dfrac{4}{5}\\&&&1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，得标准形

$$f=y_1^2+y_2^2+5y_3^2+\frac{9}{5}y_4^2\text{。}$$

故 $\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵，此时 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$ 即 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角阵。

知识点 60　正定二次型的概念及判断

更多资源请扫二维码:

60.1　概念、定理

1．概念

定义 60.1.1　正定二次型与负定二次型、正定矩阵　设实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$，如果对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f(\boldsymbol{x})>0$，则称 f 为正定二次型，并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的；如果对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f(\boldsymbol{x})<0$，则称 f 为负定二次型，并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的。

定义 60.1.2　正惯性指数、负惯性指数　二次型的标准形中正系数的个数称为此二次型的正惯性指数，负系数的个数称为负惯性指数。

2．定理

定理 60.1.1　惯性定理　设有二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，它的秩为 r，有两个可逆线性变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \text{ 及 } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$$

使 $f=k_1{y_1}^2+k_2{y_2}^2+\cdots+k_r{y_r}^2$（$k_i\neq0$，$i=1,2,\cdots,r$）及 $f=\lambda_1{z_1}^2+\lambda_2{z_2}^2+\cdots+\lambda_r{z_r}^2$($\lambda_i\neq0$，$i=1,2,\cdots,r$)，则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等。

定理 60.1.2　二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是：它的标准形的 n 个系数全为正，即它的正惯性指数等于 n。

推论　对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正。

定理 60.1.3　霍尔维茨定理　对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0。$$

对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}>0，(k=1,2,\cdots,n)。$$

60.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 55
- **综述**：基于在可逆的线性变换下二次型的惯性指数不变，因此产生了正定二次型及正定矩阵的概念。正定二次型的判断方法主要有三种：一是根据定义 60.1.1 直接判断；二是先化标准形，再利用定理 60.1.2 来判断；三是通过定理 60.1.3 中矩阵的顺序主子式的值是否全为正来判断。

60.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 56.3.2，例 55.3.2，例 55.3.3，例 59.3.3

例 60.3.1（难度系数 0.2）　当 t 为何值时，

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

为正定二次型?

解析：根据定理 60.1.3，即二次型正定的充分必要条件是其对应矩阵的各阶顺序主子式都大于 0 来判断。

解：二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}。$$

若要二次型正定，则 A 的各阶顺序主子式都大于 0，即$1>0$；$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0$；

$$\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ 0 & 4-t^2 & 2+t\\ 0 & 2+t & 3\end{vmatrix}=8-4t-4t^2$$
$$=4(2+t)(1-t)>0。$$

解不等式组

$$\begin{cases}4-t^2>0,\\ (2+t)(1-t)>0。\end{cases}$$

得 t 的取值范围是$-2<t<1$。

例 60.3.2（难度系数 0.6） 设 A 为 m 阶实对称阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，证明：$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $R(B)=n$。

错解：因为 A 正定，$B^{\mathrm{T}}AB$ 为 A 经合同变换的矩阵，而合同变换不改变矩阵的正定性，所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵。

解析：上面“错解”的错误在于这里的 $B^{\mathrm{T}}AB$ 未必是合同变换！这是因为 B 未必为方阵，它未必满秩，故考虑用定义 60.1.1 证明即可，最后可转化为方程组解的问题。

证明：必要性。设 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定，则对任意 $x\neq 0$，有 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$，即 $(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$，从而有 $Bx\neq 0$，即方程组 $Bx=0$ 只有零解，故 $R(B)=n$。

充分性。因为 A 为 m 阶实对称阵，所以$(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B=B^{\mathrm{T}}AB$，即 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为实对称阵。

设 $R(B)=n$，则方程组 $Bx=0$ 只有零解，从而对任意 $x\neq 0$，有 $Bx\neq 0$。又 A 正定，故 $(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$，即 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$，所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定。

例 60.3.3（难度系数 0.6） 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^3+5A^2+7A+3E=O$，证明 A 负定。

解析：据二次型必可通过正交变换化标准形，故对称阵 A 负定的充分必要条件是 A 的特征值全为负数，而特征值要通过概念求解。

证明：设 λ 是 A 的特征值，α 是 λ 对应的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq 0)$，则

$$\begin{aligned}(A^3+5A^2+7A+3E)\alpha&=A^3\alpha+5A^2\alpha+7A\alpha+3\alpha\\&=\lambda^3\alpha+5\lambda^2\alpha+7\lambda\alpha+3\alpha\\&=(\lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3)\alpha。\end{aligned}$$

又因为 $A^3+5A^2+7A+3E=O$，所以 $(A^3+5A^2+7A+3E)\alpha=0$，故 $\lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3=0$，

即 $(\lambda+1)^2(\lambda+3)=0$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=-3$。

因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为负数，所以 $\boldsymbol{A}$ 负定。

例 60.3.4（难度系数 0.4，2000 年考研高数三真题）　设有 n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足何种条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型。

解析：显然此题的二次型代入不全为零的值后必大于或等于 0，只要排除等于 0，即二次型的矩阵不满秩的情形，剩下的情形必恒大于 0，此时二次型正定。

解：显然 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$，等号成立当且仅当方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \qquad\cdots\\ x_n+a_nx_1=0\end{cases}\tag{60.1}$$

仅有零解。方程组（60.1）仅有零解当且仅当其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0,$$

从而 $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型。

例 60.3.5（难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$R(\boldsymbol{A})=2$。

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

（2）当 k 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵。

解析：（1）根据特征值的概念，构造方程求特征值；（2）根据正定矩阵的特征值均大于 0 即可求出 k。$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值可由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值求得。

解：（1）设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 λ 对应的特征向量，则

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}。$$

上面两式相加得 $(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故 $\lambda^2+2\lambda=0$，解得两个根 $\lambda=-2,\ 0$。又因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，所以 0 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的重根，故 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\ \lambda_3=0$。

（2）$\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 也为实对称矩阵。由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可知 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-2+k$、$-2+k$、k。当 $k>2$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值全大于零，此时 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵。

第 6 篇综合测试题

6.1（知识点 55、60，难度系数 0.4） 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是（ ）。

（A）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值　　（B）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的秩

（C）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式　　（D）$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正、负惯性指数

6.2（知识点 55、49，难度系数 0.4） 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$，下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 合同的是（ ）。

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$

6.3（知识点 55，难度系数 0.6） 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与单位矩阵合同。

6.4（知识点 56、55、60，难度系数 0.4） 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（ ）。

（A）合同，且相似　　（B）合同，但不相似

（C）不合同，但相似　　（D）既不合同，也不相似

6.5（知识点 56、60，难度系数 0.4） 若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ 相似，则二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为（ ）。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

6.6（知识点 57，难度系数 0.4） 二次型 $f=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 的标准形是（ ）。

（A）$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$　　（B）$-2y_1^2$

（C）$2y_1^2-y_2^2$　　（D）$2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$

6.7（知识点 58，难度系数 0.4） 用正交变换化二次型 $f=2x_3{}^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

为标准形。

6.8（知识点 58，难度系数 0.6）　设二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+4bx_2x_3,$$

可通过正交变换化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$，求 a、b。

6.9（知识点 58，难度系数 0.6）　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1{}^2+5x_2{}^2+ax_3{}^2-2x_1x_2+2ax_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2，试用正交变换化二次型为标准形，并写出所用正交变换矩阵。

6.10（知识点 58，难度系数 0.6）　已知二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+ax_2^2+3x_3^2+2bx_1x_2+4x_2x_3,$$

通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求 a、b 及所用的正交变换矩阵。

6.11（知识点 59，难度系数 0.4）　用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+10x_3^2+8x_2x_3$$

为标准形，并写出所用线性变换。

6.12（知识点 59、60，难度系数 0.4）　求下列实二次型的标准形，并指出其正惯性指数和负惯性指数：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2。$$

6.13（知识点 60，难度系数 0.2）　试问下列二次型中有几个是正定二次型（　）。

① $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+3x_3^2$；② $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-x_1x_2-x_1x_3$；

③ $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2$；　④ $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

6.14（知识点 60、57，难度系数 0.4）　关于二次型，有下列四种说法：

① 二次型的标准形存在且唯一；

② 复数域上的二次型的标准形对应的矩阵是单位阵；

③ 正定的二次型是满秩的；

④ 二次型的正惯性指数与负惯性指数的和为此二次型的秩。

上述说法中，正确的是（　）。

（A）①和②　（B）③和④　（C）②和③　（D）①和④

6.15（知识点 60，难度系数 0.4）　判别 n 元实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i{}^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ 的正定性。

6.16（知识点 60，难度系数 0.6）　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，证明：当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

6.17（知识点 60，难度系数 0.8）　设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型，有 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$,使 $\boldsymbol{x}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1>0$，$\boldsymbol{x}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2<0$，证明：存在 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{x}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$。

6.18（知识点 60，难度系数 0.8）　证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于 2 和符号差等于 0，或者秩等于 1。

第 6 篇综合测试题详解

6.1 解析： 此题粗看与例 55.3.2 极为相似，但仔细看发现此题中的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是实对称阵，而例 55.3.2 中的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 仅为方阵，且问法也不一样。

概念题。选择（D），根据定理 60.1.1（惯性定理）可得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正、负惯性指数。（A）是充分条件，而非必要条件；（B）为矩阵等价的充分必要条件，但仅为矩阵合同的必要条件；（C）与例 55.3.2 中的（D）同理，不是充分必要条件。

解：（D）。

6.2 解析： 同例 55.3.1，用到招数 55.3.1。直接计算 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数较为麻烦。因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，所以只要 $\boldsymbol{A}$ 特征值的符号与四个选项对角线上元素的符号是否相同即可判断是否合同。

经计算可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -2、-1、3，与其具有相同特征值符号的是（C），故选（C）。

解：（C）。

6.3 解析： $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同，因此只需证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵即可。

证明： 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $|\boldsymbol{A}|>0$，故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。由于 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，可见 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是对称矩阵。又因为 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，于是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵。

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 都是正定的，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定的，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与单位矩阵合同。

注： 正定阵首先是对称阵。

6.4 解析： 若矩阵相似则其特征值一定相同，其等价的逆否命题是若特征值不同，则矩阵一定不相似；若判断矩阵合同可利用惯性定理，对于实对称阵，也可以通过特征值来判断其惯性指数，具体分析参见例 55.3.1。用到招数 56.3.2。

选择（B），理由如下：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(3-\lambda)^2。$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3、3、0，而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1、1、0，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的惯性指数相同而特征值不同，即它们合同，但不相似。

解：（B）。

6.5 解析：本题考查矩阵相似、矩阵合同的概念和惯性定理，有一定的综合性。

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则两者的特征值相同，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2 正 1 负。又因为二次型在线性变换下的矩阵合同，根据惯性定理得二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数，故选（B）。

解：（B）。

6.6 解析：由于二次型的标准形不唯一，所以没有必要一一验证哪一个选项是标准形，实际上矩阵合同当且仅当惯性指数不变，所以只要判断惯性指数即可。注意用配方法化二次型为标准形即可判断惯性指数，无须作正交变换。

因为

$$\begin{aligned}f&=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3\\&=(x_2-2x_1-x_3)^2-4x_1{}^2-x_3{}^2-4x_1x_3+2x_1^2-4x_3^2\\&=(x_2-2x_1-x_3)^2-2x_1{}^2-5x_3^2-4x_1x_3\\&=(x_2-2x_1-x_3)^2-2(x_1+x_3)^2-3x_3^2，\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_2-2x_1-x_3\\ y_2=x_1+x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=y_2-y_3\\ x_2=y_1+2y_2-y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$，可得标准形 $f=y_1^2-2y_2^2-3y_3^2$，故二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 2。四个选项中仅（A）中二次型的惯性指数与之一致。

解：（A）。

注意：这里是从 x_2 开始配方，线性变换须可逆。

6.7 解析：常规题。此类题型的关键是求二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量。

解：二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$。

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda-1 & -\lambda-1 & 0\\ -1 & -\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)\text{。}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=0$。

对 $\lambda_1=3$，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ -1 & -3 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(-1,1,-2)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-2)^{\mathrm{T}}$。

对 $\lambda_2=-1$，解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$。

对 $\lambda_3=0$，解 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

所求的正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，原二次型的标准形为

$$f=3y_1^2-y_2^2\text{。}$$

6.8 解析：常规题目是已知二次型求标准形，而此题反过来，已知标准形求二次型中的待定常数。将 a 与 b 当作常量直接计算较复杂。先根据二次型的标准形给出的信息可知二次型非满秩，由此可得到 a 与 b 的一个关系式；然后根据正交变换后的标准形可知 $\lambda=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，据此可以得到 a 与 b 的另一个关系式，最终求出 a 与 b。

解：二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 2b\\ 1 & 2b & 1\end{pmatrix}$。根据其标准形对应的矩阵不满秩，可得 $|\boldsymbol{A}|=-(2b-a)^2=0$，即 $a=2b$。又因为正交变换后的标准形为 $f=y_2^2+2y_3^2$，可得 $\lambda=1$ 为

$\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 $\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|=4ab=0$，解之得 $a=0$， $b=0$。

6.9 解析：此题的关键是根据二次型矩阵的秩求解变量 a，之后为常规做法。

解：二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&a\\-1&5&-3\\a&-3&a\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&24&a-15\\-1&5&-3\\0&5a-3&-2a\end{pmatrix}$，由 $R(\boldsymbol{A})=2$，得 $\dfrac{24}{5a-3}=\dfrac{a-15}{-2a}$，解得 $a=3$。

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda&4-\lambda&0\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\-1&6-\lambda&-3\\3&-6&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(4-\lambda)(\lambda-9)。$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=9$。

对 $\lambda_1=0$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$。

对 $\lambda_2=4$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$。

对 $\lambda_3=9$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&-1&3\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$。

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 后，原二次型化为标准形

$$f=4y_2^2+9y_3^2。$$

6.10 解析：由于正交变换前后二次型对应的两个矩阵是相似的，所以有相同的特征值。再根据特征值的两个性质即可求系数 a、b。

解：二次型 f 关于 $\boldsymbol{x}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ b & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，关于 $\boldsymbol{y}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$。因为在正交变换下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=1，\lambda_2=2，\lambda_3=5。$$

据特征值的性质得

$$2+a+3=1+2+5=8，\ |\boldsymbol{A}|=6a-8-3b^2=1\times2\times5=10，$$

解得 $a=3$，$b=0$。

$\lambda_1=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$。

$\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。

$\lambda_3=5$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，根据 $\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

基础解系为$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。

所求的正交变换矩阵为$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。

6.11 解析：配方应先从平方项开始，按照顺序进行，直到所有的项都是平方项时才结束。

解：
$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+9x_3^2+6x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2,\end{aligned}$$

令$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=x_2+3x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\ x_2=y_2-3y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$，线性变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}。$$

原二次型的标准形为$f=y_1^2+y_2^2$。

6.12 解析：根据惯性定理可知二次型经过可逆的线性变换后其惯性指数不变，因此无须作正交变换，只需要用配方法即可。

解：用如下配方法

$$f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1+2x_2+x_3\right)^2+2x_3^2。$$

令$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_3\end{cases}$即$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-y_3\\ x_2=y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$，得标准形$f=y_1^2+2y_3^2$。

所以原二次型的正惯性指数为 2，负惯性指数为 0。

6.13 解析：本题考查 n 元二次型正定的各种判断法。对于③，它是规范形，可直接判断；对于①，用配方法化标准形即可；②、④用顺序主子式判定。

① $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+3x_3^2=(x_1+x_2)^2+3x_3^2$，正惯性指数为 2，非正定。

③ $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2$ 的正惯性指数为 2，非正定。

②对应矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 4 \end{pmatrix}$。根据顺序主子式判定：因为 $2>0$，$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}=6-\frac{1}{4}>0$，

$$\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 4 \end{vmatrix}=24-\frac{3}{4}-1>0。$$

所以原二次型正定。

④对应矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，用顺序主子式判定，因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，故原二次型非正定。

解：（B）。

6.14 解析：本题考查二次型的基本概念。

因为二次型的规范形唯一但标准形不唯一，故①错误；因为复数域上的二次型的标准形对应的矩阵对角线上的元素有三种：1、−1、0，所以不一定是单位阵，故②错误；因为正定二次型对应的矩阵与单位阵合同，所以它是满秩的，故③正确；二次型的标准形对应对角阵，其对角线上非零元素的个数即为矩阵的秩，此个数即为对角线上正、负元素个数之和，故④正确。

解：（B）。

6.15 解析：用霍尔维茨定理，通过各阶顺序主子式判断即可。注意二次型对应的矩阵的各阶顺序主子式有相同的形式。

解：二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，其 k（$k=1,2,\cdots,n$）阶顺序主子式

$$\Delta_k=\left(1+\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}>0\text{（}k=1,2,\cdots,n\text{）。}$$

故二次型 f 正定。

6.16 解析： 用定义证明 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，需要证明两点，一是 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，二是对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$。大家容易忽略第一点。

解： 因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵。

对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}&=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\\&=\lambda\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2>0,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

6.17 解析： 从已知条件立即可以判断出此二次型既不正定也不负定，因此其正惯性指数与负惯性指数均非零，直接求解不易，要“迂回”到规范形来求（即使标准形也不好求）。

解： 根据已知条件可知，此二次型的规范形中正、负惯性指数均非零，因此可设其经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后变成规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2\text{（其中 }p\geqslant1,\ r>p\text{）。}$$

易见当 $\boldsymbol{y}_0=\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{p}},\dfrac{1}{\sqrt{r-p}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{r-p}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$（其中 p 个 $\dfrac{1}{\sqrt{p}}$，$r-p$ 个 $\dfrac{1}{\sqrt{r-p}}$）时，$f=0$。令 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_0$，因为 $\boldsymbol{C}$ 可逆且 $\boldsymbol{y}_0\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$。

6.18 解析： 此题需要灵活地进行线性变换，关键是线性变换须可逆。

证明：必要性。 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$，下面分情况讨论。

（1）当向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)$ 与向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)$ 成比例，即 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}(k\neq0)$ 时，不妨设 $a_1\neq0$，则令

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

则此变换可逆，在此线性变换下二次型变为 $f=ky_1^2$，其秩为 1。

（2）当 $\boldsymbol{\beta}\neq k\boldsymbol{\alpha}$ 时，不妨设 $\dfrac{a_1}{b_1}\neq\dfrac{a_2}{b_2}$，则令

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

此变换可逆，此时的二次型变为 $f=y_1y_2$。再令 $y_1=z_1+z_2,y_2=z_1-z_2$，得 $f=z_1^2-z_2^2$，

此时可得二次型的秩为 2 且符号差为 0。

充分性。若一个二次型的秩为 1，即有形式 $f=a_{11}x_1^2$，它本身即可看成两个实系数的一次齐次多项式的乘积；若一个二次型的秩等于 2 和符号差等于 0，则它在线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 下有规范形

$$f=z_1^2-z_2^2=(z_1-z_2)(z_1+z_2).$$

所以在线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$ 下，原二次型也可以化为两个一次齐次多项式的乘积。